11.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 3 = 6 Punkte)
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.001 & -2.3 \\ -1.35 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.295 \\ -6.72 \end{pmatrix}$$

besitzt die exakte Lösung $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$.
Sie sollen dieses Gleichungssystem nun selbst lösen. Allerdings stehen Ihnen für die Berechnung nur 3 Stellen zur Verfügung. Das bedeutet, dass jede Zahl in Exponentialschreibweise betrachtet wird, und zwar wie folgt:

$$\pm 0.x_1x_2x_3 \cdot 10^E \qquad (x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}, x_1 \neq 0, E \in \mathbb{Z}).$$

Sollte eine Zahl mehr Stellen zur Speicherung benötigen, wird sie einfach abgeschnitten (z.B. $12.45 \Rightarrow 0.124 \cdot 10^2$).
Berechnen Sie die Lösung mit dieser Zahlendarstellung und dem Gauß-Algorithmus

(i) ohne Spaltenpivotsuche.

(ii) mit Spaltenpivotsuche.

Gibt es einen Unterschied?

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Bestimmen Sie handschriftlich die Cholesky-Zerlegung der Matrix A und bestimmen Sie mit deren Hilfe die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 & 12 \\ 3 & 12 & 27 & 27 \\ 3 & 12 & 27 & 36 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)
Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \hat{R} & v \\ u^T & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $x, b \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Geben Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A an.

(ii) Zeigen Sie: A ist nichtsingulär genau dann, wenn

$$u^T \hat{R}^{-1} v \neq 0.$$

(iii) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des obigen linearen Gleichungssystems, der möglichst wenig Flops benötigt.

Hinweis: In (i) kann man durch einen sogenannten Block-Gauß-Eliminationsschritt das komplette u^T in A eliminieren, um dadurch A auf obere Dreiecksgestalt zu bringen. Dabei ist es notwendig, dass $\hat{R}$ invertierbar ist; auch die Formel in (ii) ist hilfreich.

Aufgabe 4: (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Für welche der drei folgenden Matrizen A, B und C existiert eine Cholesky-Zerlegung? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 18 & 12 \\ 4 & 7 & 17 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Abgabedatum: 18.01.2017, 12 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut