Universität zu Köln Wintersemester 2016/2017

Dr. M. Lanser 18. Januar 2017

12. Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Bestimmen Sie näherungsweise sowohl die absolute als auch die relative Konditionszahl des Problems

$$f(a,b) := a - \sqrt{a^2 - b}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $a^2 > b$. Hierbei ist $x^* := f(a,b)$ natürlich die kleinere Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 2ax + b = 0$. Kommentieren Sie: in welchen Fällen ist das Problem gut bzw. schlecht konditioniert?

Aufgabe 2: (4 + 2 = 6 Punkte)
Gegeben sei ein Kegel mit einer kreisförmiger Grundfläche mit dem Radius $r > 0$ und der Höhe $h > 0$.

(i) Bestimmen Sie näherungsweise die absolute und die relative Konditionszahl des Problems "Bestimmen Sie das Volumen des Kegels". Die Kondition sollte von r und h abhängen.

(ii) Geben Sie die absoluten und die relativen Konditionszahlen für die Fälle $r = 2$, $h = 5$ bzw. $r = 0.1$, $h = 2000$ an.

Aufgabe 3: (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

(i) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$||A||_2^2 = \rho(A^H A),$$

wobei $A^H := \overline{A}^T$ und $\rho(A^H A)$ der Spektralradius von $A^H A$ ist.

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit betragsmäßig größtem Eigenwert $\lambda_{\max}$ und betragsmäßig kleinstem Eigenwert $\lambda_{\min}$. Zeigen Sie, dass sich die Kondition $\kappa = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2$ dann auch wie folgt schreiben läßt:

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\kappa(A^T A) = (\kappa(A))^2$$

Hinweis zu (i): Eine hermitesche Matrix ist **unitär diagonalisierbar**.

Programmieraufgabe (10 Punkte)
Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ihre Implementierung sollte nur mit sparse-Matrizen (dünnbesetzten Matrizen) arbeiten. Testen Sie die Implementierung mit der dünnbesetzten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in verschiedenen Größen n. Überprüfen Sie die Korrektheit der Software, indem Sie $||A - R^T R||_1$ oder $||A - R^T R||_\infty$ berechnen und ausgeben.

Abgabedatum: 26.01.2017, 12 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut