Universität zu Köln Wintersemester 2016/2017

Dr. M. Lanser 27. Oktober 2016

2.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 3 = 6 Punkte)
Archimedes von Syrakus (ca. 287 bis 212 v. Chr.) ermittelte als untere und obere Grenzen von π die Zahlen $x_u = 3 + \frac{10}{71}$ und $x_o = 3 + \frac{10}{70}$. Details zur Berechnung der Grenzen können z.B. unter *https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl* gefunden werden.

a) Bestimmen Sie jeweils eine obere Schranke für den absoluten Fehler von x_u, x_o und den Mittelwert $x_m := \frac{x_u + x_o}{2}$. Verwenden Sie nur die Werte x_u und x_o für Ihre Abschätzungen.

b) Sei $h(x) := sin(x)$ gegeben. Wie viele Schritte des Intervallhalbierungsverfahrens zur Ermittlung der Nullstelle π von h mit den Startwerten $x_n^{(0)} := x_o$ und $x_p^{(0)} := x_u$ sind mindestens notwendig, damit für den Mittelpunkt $x_m^{(k)}$ der absolute Fehler

$$|x_m^{(k)} - \pi| < 0.0001$$

garantiert werden kann?

Aufgabe 2: (2 + 2 = 4 Punkte)
Sei $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \frac{1}{4}x^3.$$

a) Zeigen Sie mithilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes, dass das Fixpunktproblem $g(x) = x$ mindestens eine Lösung im Intervall $[-1, 1]$ hat.

b) Führen Sie per Hand 3 Schritte der Fixpunktiteration aus. Starten Sie mit $x^{(0)} = 1$.

Aufgabe 3: (3+3=6 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie das Fixpunktverfahren und die Bisektion gegenüberstellen. Nutzen Sie dazu Ihre Programme aus den Programmieraufgaben 1 und 2. Stellen Sie für verschiedene Startwerte Ihrer Wahl (a und b bei der Bisektion bzw. $x^{(0)}$ bei der Fixpunktiteration) und verschiedene Genauigkeiten *tol* die Anzahl der benötigten Iterationen beider Verfahren gegenüber. Welches Verfahren würden Sie für die folgenden Probleme empfehlen? Untersuchen Sie

a) erneut die Funktion aus Aufgabe 2 auf Fixpunkte

b) $c : [-0.75, 2] \to \mathbb{R};\ c(x) = \log_{10}(1 + x)$ auf Nullstellen

Denken Sie in beiden Fällen daran, dass Sie, je nach Verfahren, eine äquivalent Fixpunkt- oder Nullstellen-Formulierung benötigen!

Hinweis 1: In beiden Verfahren sollten die **Funktionsauswertung** den Großteil der Laufzeit des Programms ausmachen. Um den **Aufwand** beider Verfahren noch besser vergleichen zu können, kann man, anstelle der Iterationsanzahl, auch die Anzahl der Funktionsauswertungen vergleichen. Überlegen Sie sich dazu, wie viele Funktionsauswertungen für k Iterationsschritte in den beiden Verfahren benötigt werden.

Hinweis 2: Als Darstellung eignet sich für die Gegenüberstellung der Verfahren eine Tabelle. Hier ein Beispiel.

tol	**Verfahren 1**	**Verfahren 2**
1e-3	7	11
1e-6	12	14
1e-9	14	16

Tabelle 1: Vergleich der notwendigen Iterationen bis zum Erreichen der Abbruchgenauigkeit *tol* für Verfahren 1 und Verfahren 2.

Programmieraufgabe 1: (10 Punkte)
Programmieren Sie eine Fixpunktiteration zu Aufgabe 2.
Genauer: Programmieren Sie eine Funktion $fixpunkt(x^{(0)}, tol)$, welche, ausgehend von einem Startwert $x^{(0)}$, den Fixpunkt der Funktion $g(x)$ aus Aufgabe 2 mittels einer Fixpunktiteration approximiert. Das Programm soll terminieren, wenn für den absoluten Fehler ε gilt:

$$\varepsilon := |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < tol.$$

Testen Sie Ihr Programm auf jeden Fall mit dem Startwert $x^{(0)} = 1$ und der Genauigkeit $tol = 10^{-7}$.

Programmieraufgabe 2: (10 Punkte)
Programmieren Sie die Intervallhalbierung $bisektion(a, b, tol)$, welche ausgehend von den Intervallgrenzen a und b die Nullstelle einer Funktion f berechnet. Überführen Sie das Fixpunktproblem $g(x) = x$ aus Aufgabe 2 in eine Nullstellenformulierung $f(x) = 0$ und testen Sie Ihre Implementierung anhand dieses Beispiels. Lassen Sie die Intervallhalbierung iterieren, bis die Abbruchbedingung

$$\varepsilon := |x_n^{(k)} - x_p^{(k)}| < tol$$

erfüllt ist.

Abgabedatum: 03.11.2016, 12:00 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut