3.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Erstellen Sie (z.B. mit MATLAB oder per Hand) ein Diagramm, in dem die Funktionen

$$f(x) := \tan(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) := x$$

dargestellt sind.
Besitzt $\tan(x)$ auf dem Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ einen Fixpunkt?
Konstruieren Sie eine konvergente Fixpunktiteration für den Fall, dass ein Fixpunkt existiert.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Die positive Nullstelle $\sqrt{a}$ der Funktion $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$ soll mit dem Newton-Verfahren berechnet werden. Geben Sie (mit Beweis) an, für welche Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ die durch das Newton-Verfahren definierte Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen diese Nullstelle konvergiert.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \end{bmatrix}$$

Betrachten Sie die Normen $||A||_1 := \sup_{j=1...m}\{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\}$ (Spaltensummennorm) und $||A||_\infty := \sup_{i=1...n}\{\sum_{j=1}^m |a_{ij}|\}$ (Zeilensummennorm), wobei $A = (a_{ij})$ eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten ist. Zeigen Sie, dass g bezüglich einer der beiden Normen kontrahierend ist und bezüglich der anderen nicht.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Vergleichen Sie Ihre Implementierungen des Newton-Verfahrens aus Programmieraufgabe 1 und der Fixpunktiteration vom letzen Übungsblatt. Nutzen Sie dazu die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3$. Ermitteln Sie für verschiedene Startwerte $x^{(0)} \in [-1, 1]$ Ihrer Wahl, wieviele Iterationen und Funktionsauswertungen (von f bzw. f') beide Verfahren bis zum Erreichen einer Fehlergenauigkeit von $|x^{(k)} - x^{(k+1)}| < 10^{-7}$ benötigen. Welches Verfahren empfehlen Sie?

Programmieraufgabe 1: (10)
Programmieren Sie das eindimensionale Newton-Verfahren in MATLAB. Testen Sie Ihr Programm mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3$$

und berechnen Sie deren Nullstelle. Lassen Sie das Newton-Verfahren iterieren, bis der absolute Fehler $|x^{(k)} - x^{(k+1)}| < 10^{-7}$ erfüllt ist.

Abgabedatum: 10.11.2016, 12 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut