Universität zu Köln Wintersemester 2016/2017

Dr. Martin Lanser 17. November 2016

5.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ und $F(x) := \frac{1}{2} f(x)^T f(x)$. Zeigen Sie:

a) Jede Nullstelle von f ist ein globales Minimum von F und jedes Minimum x^* von F mit $F(x^*) = 0$ ist auch eine Nullstelle von f.

b) $d^{(k)} = -\nabla F(x^{(k)})$ ist eine Abstiegsrichtung von F in $x^{(k)}$, wenn $\nabla F(x^{(k)}) \neq 0$.

c) Ist $f(x^{(k)}) \neq 0$ und $Df(x^{(k)})$ regulär, so ist die Newton-Korrektur $\Delta x^{(k)} = -(Df(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)})$ eine Abstiegsrichtung von F in $x^{(k)}$.

Aufgabe 2: (1 + 2 + 3 + 4 = 10 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

a) Skizzieren Sie (per Hand oder mit MATLAB) die Funktion f auf dem Intervall $[-10, 10]$.

b) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Berechnung der Nullstelle von f.

c) Zeigen Sie, dass das lokale Newtonverfahren für Startwerte mit $|x^{(0)}| \geq 1$ nicht konvergiert. Was passiert im Falle $|x^{(0)}| = 1$?

d) Berechnen Sie per Hand, ausgehend von $x^{(0)} = 2$, zwei Schritte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ des globalisierten Newton-Verfahrens mit Schrittweitensteuerung aus der Vorlesung. Nutzen Sie die Parameter $\rho = 10^{-8},\ \beta = 0.5,\ \sigma = 10^{-4},\ p = 2.1$.

Aufgabe 3: (6 Punkte, 2 Wochen Bearbeitungszeit)
Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten des **lokalen Newton-Verfahrens** (Programmieraufgabe 1, Übungsblatt 4) mit dem Konvergenzverhalten des **globalisierten Newton-Verfahrens** (Programmieraufgabe 1, dieses Übungsblatt). Nutzen Sie dazu erneut die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ -y^3 + 3x^2y + 1 \end{pmatrix}$$

und die Routine *draw_nits* (Übungsblatt 4). Ersetzen Sie dazu den Aufruf von Newton in *draw_nits* durch den Aufruf des globalisierten Newton-Verfahren und rufen Sie *draw_nits([-3:0.1:3] , [-3:0.1:3], 1e-6)* auf. Stellen Sie die erstellte Grafik mit der entsprechenden Grafik aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 gegenüber. Kommentieren Sie die Gegenüberstellung.
Achtung: Für diese Aufgabe haben Sie 2 Wochen Bearbeitungszeit. Die Abgabe dieser Aufgabe ist also am 01.12.2016 fällig.

Programmieraufgabe 1 (10 Punkte, 2 Wochen Bearbeitungszeit)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ -y^3 + 3x^2y + 1 \end{pmatrix} ,$$

die Sie bereits von Übungsblatt 4 kennen. Implementieren Sie das globalisierte Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung aus der Vorlesung zur Approximation der Nullstellen von f. Ihr Verfahren sollte als Eingabeparameter einen Startvektor $x^{(0)}$ und eine Abbruchgenauigkeit *tol* erhalten und die Nullstelle x^* und die Anzahl der benötigten Iterationen *nits* ausgeben. Nutzen Sie zudem die Parameter $\rho = 10^{-8}$, $\beta = 0.5$, $\sigma = 10^{-4}$, $p = 2.1$. Testen Sie die Implementierung mit verschiedenen Startwerten.
Achtung: Für diese Aufgabe haben Sie 2 Wochen Bearbeitungszeit. Die Abgabe dieser Aufgabe ist also am 01.12.2016 fällig.

Abgabedatum: 24.11.2016, 12 Uhr, Abgabe der Ausarbeitung in den Kasten im MI.