Universität zu Köln Wintersemester 2016/2017

Dr. Martin Lanser 24. November 2016

6.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)
Diese Aufgabe dient der Veranschaulichung der Armijo-Bedingung in einer Raumdimension

$$g(\alpha^{(k)}) \leq h_1(\alpha^{(k)})$$

mit $g(\alpha) := F(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$ und $h_1(\alpha) := F(x^{(k)}) + \sigma\alpha F'(x^{(k)})d^{(k)}$.
In dieser Aufgabe sei $F(x) := \frac{1}{14}\left(x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12\right)$ gegeben.

a) Skizzieren Sie für $x^{(k)} = -4.1$, $d^{(k)} = -F'(x^{(k)})$ und $\sigma = 10^{-2}$ alle Teilintervalle von $[0, 1]$, in denen die Armijo-Bedingung erfüllt ist. Am besten gelingt das mit MATLAB. Erstellen Sie dazu Plots der Funktionen $g(\alpha)$ und $h_1(\alpha)$ für $\alpha \in [0, 1]$ in einem Diagramm und markieren Sie darin die Teilintervalle.

b) Markieren Sie in Ihrer Skizze auch, welches $\alpha^{(k)}$ schlussendlich explizit bestimmt wird, wenn nacheinander die Werte $\alpha^{(k)} = \beta^0$, $\alpha^{(k)} = \beta^1$, $\alpha^{(k)} = \beta^2$, ..., $\alpha^{(k)} = \beta^l$ auf Erfüllen der Armijo-Regel getestet werden. Untersuchen Sie einmal $\beta = 0.5$ und einmal $\beta = 0.75$.

c) Die Armijo-Bedingung führt oft zu unnötig kleinen Schrittweiten, da $g(\alpha)$ nicht nach unten beschränkt wird. Abhilfe schaffen z. B. die sogenannten **Goldstein-Bedingungen**

$$h_2(\alpha^{(k)}) \leq g(\alpha^{(k)}) \leq h_1(\alpha^{(k)})$$

mit $h_2(\alpha) := F(x^{(k)}) + (1 - \sigma)\alpha F'(x^{(k)})d^{(k)}$.
Skizzieren Sie für $x^{(k)} = -4.1$, $d^{(k)} = -F'(x^{(k)})$ und $\sigma = 0.25$ das Teilintervall von $[0, 0.25]$, in dem die Goldstein-Bedingungen erfüllt sind. Gehen Sie dazu analog zu Aufgabenteil a) vor. Sind hier zu kleine Schrittweiten tatsächlich ausgeschlossen?

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Es sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 6 \\ x_1^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass das lokale Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ für jeden Startvektor $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in [\frac{3}{2}, 3] \times [\frac{3}{2}, 3] \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert.

Abgabedatum: 01.12.2016, 12 Uhr, Abgabe der Ausarbeitung in den Kasten im MI.