# 7.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

**Hinweis:** Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

**Aufgabe 1:** (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit dem Thema Rundungsfehler beschäftigen.

**(i)** Nehmen Sie sich 2 beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit 3 Nachkommastellen (z.B. 2,378 und 5,739) und berechnen Sie das Produkt $a \cdot b$. Geben Sie ebenfalls das auf 2 Nachkommastellen gerundete Ergebnis an. Runden Sie anschließend die beiden Zahlen $a$ und $b$ auf 2 Nachkommastellen und berechnen Sie das Produkt der gerundeten Zahlen $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$. Was stellen Sie fest?
Bezeichnen Sie $a = \tilde{a} + \delta a$ und $b = \tilde{b} + \delta b$. Berechnen Sie für allgemeine $a, b$ das Produkt der beiden Zahlen und den Einfluß des Rundens bei der Bildung des Produkts. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis an Ihrem vorher gewählten Beispiel.

**(ii)** Betrachten Sie die Matrix $A$ und den Vektor $b$

$$A = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 & 1.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{9} \\ 0.4 & 1.2 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.25 \\ \frac{8}{3} \\ 13.6 \end{pmatrix}$$

Überprüefen Sie handschriftlich, daß $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung der Aufgabe $Ax = b$ ist. Sei $A_i$ $(i \geq 0)$ die Matrix, die man durch Runden der Einträge von $A$ auf die $i$-te Nachkommastelle erhält. Lösen Sie die beiden Systeme $A_2 x = b$ und $A_1 x = b$ mit **matlab**. Was fällt Ihnen am Ergebnis auf? (Sie müssen keinen Programmcode abgeben.)

**(iii)** Es wurden zwei numerische Berechnungen mit **matlab** durchgeführt, die den gleichen Ergebnisvektor hätten liefern müssen. Zieht man aber die beiden erhaltenen Ergebnisse voneinander ab, so erhält man folgende Differenzen :

| Eintrag | 1.0e-14 * |
|---|---|
| 1 | 0.04440892098501 |
| 2 | 0.08881784197001 |
| 3 | -0.00832667268469 |
| 4 | 0.08881784197001 |
| 5 | 0.02220446049250 |

Was fällt Ihnen auf? Wie kann man sich diese Abweichungen erklären?

**Aufgabe 2:** (10 Punkte)
Angenommen ein sehr einfacher Rechner kann nur ein extrem kurzes Gleitkommaformat verwenden. Dieses Format stelle sich dar durch

$$\pm b_0.b_1 b_2 \times 2^E$$

mit $b_i \in \{1, 0\}$ und $E \in \{-1, 0, 1\}$. Dabei wird $b_0$ explizit (nicht versteckt) abgespeichert. Null wird durch $0.00 \times 2^E$ dargestellt, alle anderen Zahlen sind stets normalisiert, d. h. $b_0 = 1$. Zeichnen Sie alle in diesem Format darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden ein.
Welche Maschinengenauigkeit `eps` hat dieser Rechner? Haben alle Maschinenzahlen den gleichen Abstand?
**Bemerkung:** Heutige 64-bit Maschinenzahlen stellen sich dar durch

$$1.b_1 b_2 b_3 \dots b_{52} \times 2^E$$

mit $b_i \in \{0, 1\}$ und $E = -1022, \dots, 1023$.

**Abgabedatum: 08.12.2016, 12 Uhr** in den Kasten im Mathematischen Insitut