8.Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Programmieraufgabe 1: (4+2+2+2=10 Punkte)

a) Implementieren Sie die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche aus der Vorlesung zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b,$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Erstellen Sie also ein äquivalentes Gleichungssystem $Rx = b_1$, wobei R rechte, obere Dreiecksgestalt hat. Die Lösung x soll dann mithilfe der Rückwärtssubstitution aus R und b_1 gewonnen werden.

b) Testen Sie die Implementierung mit verschiedenen kleineren Matrizen A und rechten Seiten b und überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie sich die Norm des Residuums $||Ax - b||$ anschauen. Beachten Sie bei der Wahl Ihrer Beispiele auch den unten gegebenen Hinweis.

c) Messen Sie die für die Elimination benötigte Zeit mittels *tic* und *toc* (siehe auch Übung 1, Aufgabe 2 ii)) für $A = rand(500)$ und $b = rand(500, 1)$.

d) Optimieren Sie Ihre Implementierung, indem Sie die innere for-Schleife im Eliminationsprozess durch Vektoroperationen ersetzen (siehe auch Übung 1, Aufgabe 2 ii)). Messen Sie erneut die Laufzeit wie in c) und vergleichen Sie. Testen Sie verschiedene Varianten: mit Teilzeilen wie z.B. $A(i, k+1 : n)$ oder kompletten Zeilen $A(i, :)$. Was fällt auf?

Hinweis: Ohne Pivotsuche ist die Gauß-Elimination nicht immer stabil/durchführbar. Zum Beispiel, wenn im k-ten Eliminationsschritt $a_{kk}^{(k)} = 0$ gilt. Sollten in b) bis d) Probleme auftreten, wählen Sie am besten andere Beispielmatrizen.

Programmieraufgabe 2: (3+4+3=10 Punkte)
Diese Aufgabe kombiniert die Themenfelder IEEE-Arithmetik und Gauß-Elimination.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite $b = rand(2,1)$.

a) Berechnen Sie nacheinander für die Werte $\varepsilon = 1e{-}1, 1e{-}2, 1e{-}3, ..., 1e{-}17$ die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = b$ und den Fehler $||Ax - b||$ mithilfe Ihrer Implementierung aus Programmieraufgabe 1. Wie verhält sich der Fehler im Verhältnis zu ε und warum?

b) Führen Sie die gleiche Untersuchung wie in a) durch, nur diesmal in **single precision**. Welche Unterschiede ergeben sich zu Aufgabenteil a) und warum? **Hinweis:** In Matlab kann man eine Zahl a durch $single(a)$ auf single precision runden. Rechnungen der Form $a + b * c$ kann man somit durch $single(a + single(b * c))$ in single precision durchführen. Zur Bearbeitung dieses Aufgabenteils müssen Sie die Implementierung aus Programmieraufgabe 1 somit einmal in single precision übertragen.

c) Fügen Sie der Implementierung aus Programmieraufgabe 1) eine Spaltenpivotsuche hinzu. Führen Sie die Untersuchung aus Aufgabenteil a) mit $\varepsilon = 1e - 1, 1e - 2, 1e - 3, ..., 1e - 17$ erneut durch. Was fällt im Vergleich zu a) auf?

Hinweis: Die in a), b) und c) berechneten Fehler lassen sich auch gut grafisch oder tabellarisch gegenüberstellen.

Abgabedatum: 15.12.2016, 12 Uhr in den Kasten im Mathematischen Insitut