

7. Übung zur Algorithmischen Mathematik und Programmieren

Hinweis: Beachten Sie alle Abgabeformalitäten, die auf dem ersten Übungszettel angegeben wurden.

Aufgabe 1: ($3 + 4 + 3 = 10$ Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit dem Thema Rundungsfehler beschäftigen.

- (i) Nehmen Sie sich 2 beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit 3 Nachkommastellen (z.B. 2,378 und 5,739) und berechnen Sie das Produkt $a \cdot b$. Geben Sie ebenfalls das auf 2 Nachkommastellen gerundete Ergebnis an. Runden Sie anschließend die beiden Zahlen a und b auf 2 Nachkommastellen und berechnen Sie das Produkt der gerundeten Zahlen $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$. Was stellen Sie fest?

Bezeichnen Sie $a = \tilde{a} + \delta a$ und $b = \tilde{b} + \delta b$. Berechnen Sie für allgemeine a, b das Produkt der beiden Zahlen und den Einfluß des Rundens bei der Bildung des Produkts. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis an Ihrem vorher gewählten Beispiel.

- (ii) Betrachten Sie die Matrix A und den Vektor b

$$A = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 & 1.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{9} \\ 0.4 & 1.2 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.25 \\ \frac{8}{3} \\ 13.6 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie handschriftlich, daß $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung der Aufgabe $Ax = b$ ist. Sei A_i ($i \geq 0$) die Matrix, die man durch Runden der Einträge von A auf die i -te Nachkommastelle erhält. Lösen Sie die beiden Systeme $A_2x = b$ und $A_1x = b$ mit **matlab**. Was fällt Ihnen am Ergebnis auf? (Sie müssen keinen Programmcode abgeben.)

- (iii) Es wurden zwei numerische Berechnungen mit **matlab** durchgeführt, die den gleichen Ergebnisvektor hätten liefern müssen. Zieht man aber die beiden erhaltenen Ergebnisse voneinander ab, so erhält man folgende Differenzen :

Eintrag	1.0e-14 *
1	0.04440892098501
2	0.08881784197001
3	-0.00832667268469
4	0.08881784197001
5	0.02220446049250

Was fällt Ihnen auf? Wie kann man sich diese Abweichungen erklären?

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Angenommen ein sehr einfacher Rechner kann nur ein extrem kurzes Gleitkommaformat verwenden. Dieses Format stelle sich dar durch

$$\pm b_0.b_1b_2 \times 2^E$$

mit $b_i \in \{0, 1\}$ und $E \in \{-1, 0, 1\}$. Dabei wird b_0 explizit (nicht versteckt) abgespeichert. Null wird durch 0.00×2^E dargestellt, alle anderen Zahlen sind stets normalisiert, d. h. $b_0 = 1$. Zeichnen Sie alle in diesem Format darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden ein.

Welche Maschinengenauigkeit **eps** hat dieser Rechner? Haben alle Maschinenzahlen den gleichen Abstand?

Bemerkung: Heutige 64-bit Maschinenzahlen stellen sich dar durch

$$1.b_1b_2b_3 \dots b_{52} \times 2^E$$

mit $b_i \in \{0, 1\}$ und $E = -1022, \dots, 1023$.

Abgabedatum: 05.12.2019, 12 Uhr in den Kasten im Mathematischen Institut