DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

22. Mai 2019

8. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen II

Aufgabe 1 (Äquivalentes Optimierungsproblem): $(4 + 6 + 2 = 12$ Punkte$)$
Es seien X und M Hilberträume, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, X-elliptische Bilinearform, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, $F : X \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional, sodass

$$\left.\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= F(v) \qquad \forall v \in X,\\ b(u,q) &= 0 \qquad\quad\;\; \forall q \in M, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

eine Lösung $(u,p) \in X \times M$ besitzt. Wir definieren

$$J(v) := \tfrac{1}{2}a(v,v) - F(v), \quad v \in X,$$

und die Lagrangefunktion

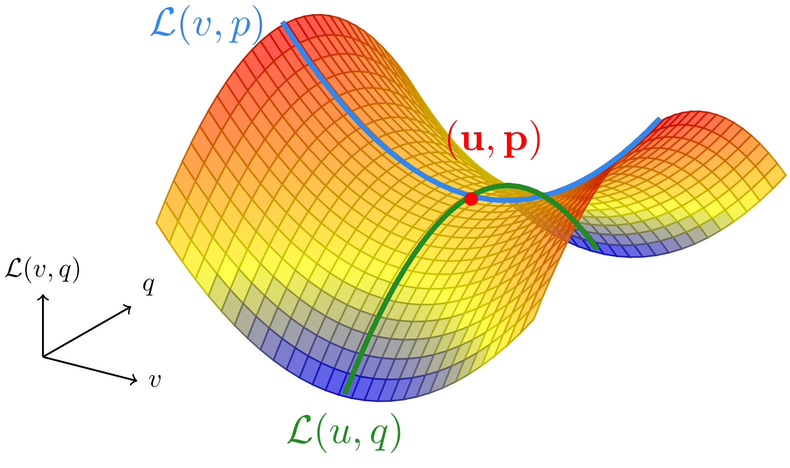
$$\mathcal{L}(v,q) := J(v) + b(v,q), \quad v \in X, q \in M.$$

Im Folgenden betrachten wir das Optimierungsproblem $(u,p) \in X \times M$ zu finden, sodass

$$\mathcal{L}(u,p) = \inf_{v\in X} \sup_{q\in M} \mathcal{L}(v,q). \tag{2}$$

Eine Lösung (u,p) des Optimierungsproblems (2) ist gerade ein Sattelpunkt, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}(u,q) \le \mathcal{L}(u,p) \le \mathcal{L}(v,p) \quad \forall v \in X, q \in M \qquad \textit{(Sattelpunkt)}. \tag{3}$$



Visualisierung eines Sattelpunktes.

Zeigen Sie, dass

a) eine Lösung (u,p) des Variationsproblems (1) auch Lösung des Optimierungsproblems (2) ist,

b) eine Lösung (u,p) des Optimierungsproblems (2) auch Lösung des Variationsproblems (1) ist,

c) die Lösung u eindeutig ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 29. Mai 2019, 14:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.