DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

29. Mai 2019

9. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen II

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Beweisen Sie ausführlich Satz 3.9 aus der Vorlesung: Die Voraussetzungen des Satzes von Brezzi seien für X und M erfüllt. X^h und M^h erfüllen die LBB-Bedingung. Dann gilt

$$||u - u_h||_X + ||\lambda - \lambda_h||_M \leq c \cdot \left(\inf_{v_h \in X^h} ||u - v_h||_X + \inf_{\mu_h \in M^h} ||\lambda - \mu_h||_M \right).$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $X := (H_0^1(\Omega))^d$ $(d = 2, 3)$ und $M := L_0^2(\Omega)$. Weiterhin seien stetige Bilinearformen $a(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b(\cdot, \cdot) : X \times M \to \mathbb{R}$ mit Stetigkeitskonstanten α_0 und β_0 gegeben. Wir definieren

$$V := \{v \in Y;\ b(v, \mu) = 0\ \forall \mu \in M\}$$

und setzen voraus, dass $a(\cdot, \cdot)$ V-elliptisch mit Konstante α_1 ist. Zudem erfülle $b(\cdot, \cdot)$ die inf-sup-Bedingung mit Konstante β_1. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\cdot, \cdot) &: (X \times M) \times (X \times M) \to \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}((u, \lambda), (v, \mu)) &:= a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu), \\ \mathcal{F}((v, q)) &:= f(v) + g(q), \quad (v, q) \in X \times M, f \in X', g \in M'. \end{aligned}$$

Variationsformulierung: Finde $(u, \lambda) \in X \times M$, sodass für alle $(v, \mu) \in X \times M$

$$\mathcal{A}((u, \lambda), (v, \mu)) = \mathcal{F}((v, q))$$

erfüllt ist. Beweisen Sie für die lineare Abbildung $A : X \times M \to X' \times M'$ mit $(u, \lambda) \mapsto (f, g)$, die aus dem zugehörigen Sattelpunktproblem entsteht, dass

$$\operatorname{cond}(A) \leq C$$

gilt. Geben Sie C in Abhängigkeit der Konstanten α_i, β_i, $i = 0, 1$ explizit an.

Hinweise:

- Verwenden Sie die 2-Norm auf Produkträumen. Bsp.: Für $(u, \lambda) \in X \times M$ sei $||(u, \lambda)||^2 := ||u||_X^2 + ||\lambda||_M^2$.
- Machen Sie sich klar, warum $A : X \times M \to X' \times M'$ die Form

  $$A(u, \lambda) = \Big(a(u, \cdot) + b(\cdot, \lambda), b(u, \cdot) \Big)$$

  hat.

Programmieraufgabe 1 (Stokes: Konvergenz Finiter Elemente): (7 Punkte)
Erweitern Sie die Programmieraufgabe vom 7. Übungsblatt, Aufgabenteil c), um eine Analyse der Gitterkonvergenz. Betrachten Sie dazu die folgenden Elemente und Startauflösungen:

	Element	n
1	$\mathcal{P}_2$–$\mathcal{P}_0$	5
2	$\mathcal{P}_2$–$\mathcal{P}_1$ (Taylor-Hood)	5
3	MINI	5
4	Crouzeix-Raviart	5
5	$\mathcal{P}_1$–$\mathcal{P}_1$–stab.	10
6	$\mathcal{P}_2$–$\mathcal{P}_2$–stab.	5

Berechnen Sie auf den strukturierten und den unstrukturierten Gittern die relativen L^2-Fehler in der Geschwindigkeit und im Druck für die Auflösungen $i{\cdot}n$, $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Zeigen Sie jeweils die zugehörigen Konvergenzplots und berechnen Sie Schätzungen für die Konvergenzraten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Polynomgraden der Elemente.

Programmieraufgabe 2 (Locking, Sattelpunktproblem): (7 Punkte)
Schreiben Sie Ihr Programm vom 5. Übungsblatt für das Sattelpunktproblem mit Strafterm um. Verwenden Sie $2{\cdot}50^2$ viele $\mathcal{P}_2$–$\mathcal{P}_1$-Elemente und $\nu = 0.4999$. Geben Sie den relativen L^2-Fehler der Verschiebung an.

Abgabe:

- **Theorie:** Bis Mittwoch, 05. Juni 2019, 14:00 Uhr,
- **Programme:** Bis Mittwoch, 19. Juni 2019, 14:00 Uhr,

im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.