DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

05. Juni 2019

10. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen II

Aufgabe 1 (inf-sup-Stabilität): $((6 + 2) + (2 + 3) = 13$ Punkte)

1. (a) Nutzen Sie Fortin's Trick, um die inf-sup-Stabilität vom $\mathcal{P}_3$–$\mathcal{P}_1$-Element in 2D zu zeigen.
   (b) Können Sie denselben Beweis für das $\mathcal{P}_2$–$\mathcal{P}_1$-Element nutzen?
2. Bezogen auf den Beweis zur inf-sup-Stabilität des MINI-Elements:
   (a) Warum funktioniert der Beweis nicht für $\mathcal{P}_1$–$\mathcal{P}_1$-Elemente?
   (b) Können Sie den Beweis für $(\mathcal{P}_1 + \text{Bubble})^2$–$\mathcal{P}_0$-Elemente verwenden? Falls ja, modifizieren Sie den Beweis entsprechend. Falls nein, warum nicht?

Aufgabe 2: (2+2+1=5 Punkte) *[siehe Beweis von Lemma 3.1.2]*
Seien $z, p, q > 0$, dann gilt

a) $\left(z \leq p + q\right) \Longrightarrow \left(z \leq \frac{p^2}{z} + 2q\right)$.

b) $\left(z \leq p + q\right) \Longleftarrow \left(z \leq \frac{p^2}{z} + q\right)$.

c) Gilt auch $\left(z \leq p + q\right) \Longrightarrow \left(z \leq \frac{p^2}{z} + q\right)$?

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Wir betrachten das Sattelpunktproblem mit Strafterm: Gesucht wird ein $(u, \lambda) \in X \times M$, sodass

$$\begin{array}{rcrcll} a(u,v) & + & b(v,\lambda) & = & f(v) & \forall v \in X, \\ b(u,\mu) & - & t^2 \cdot c(\lambda,\mu) & = & g(\mu) & \forall \mu \in M. \end{array} \tag{1}$$

Hierbei sei $a : X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische Bilinearform, die $a(v, v) \geq 0$ $(\forall v \in X)$ erfüllt. $b : X \times M \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Bilinearform und $f \in X'$, $g \in M'$. Außerdem sei $c : M \times M \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $c(\mu, \mu) \geq 0$ $(\forall \mu \in M)$. Des Weiteren sei $t \geq 0$. Die zu (1) gehörige Bilinearform auf dem Produktraum $X \times M$ lautet

$$\mathcal{A}((u, \lambda), (v, \mu)) = a(u, v) + b(u, \mu) + b(v, \lambda) - t^2 c(\lambda, \mu).$$

- Führen Sie den Beweis zu Satz 3.1.1 ausführlich aus.
- Zeigen Sie insbesondere, dass aus dem Hilfssatz (Lemma 3.1.2) die Behauptung folgt.

Satz 3.1.1: (Stabilität des Sattelpunktproblems) Es gelte die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ sei V-elliptisch und $c(\cdot,\cdot)$ sei beschränkt. Dann wird durch (1) ein Homöomorphimus $L : X \times M \to X' \times M'$ erklärt. Für $0 \leq t \leq 1$ ist L^{-1} unabhängig von t beschränkt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 19. Juni 2019, 14:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.