DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

19. Juni 2019

11. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen II

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Es sei A eine beliebige quadratische Matrix (nicht notwendigerweise regulär) und $\mathcal{L} = A\mathcal{K}$. Dann ist $\tilde{x}$ genau dann eine Lösung der Projektionsmethode, wenn es das Residuum $||b-Ay||_2$ für $y \in x_0 + \mathcal{K}$ minimiert.

Programmieraufgabe: (30 Punkte)
Betrachten Sie auf dem Einheitsquadrat das Stokes-Problem vom 7. Übungsblatt (Aufgabenteil c)). Diskretisieren Sie das Problem mit den dort genannten stabilisierten $\mathcal{P}_1$-$\mathcal{P}_1$-Elementen auf einem strukturierten Dreiecksgitter mit $2{\cdot}80^2$ vielen Dreiecken. Setzen Sie im Druck im Knoten $(0,0)$ eine Dirichletbedingung. Implementieren Sie die Stabilisierung der Einfachheit halber so, dass im C-Block eine positiv definite Matrix steht (später können Sie die Vorzeichen wieder negieren). Führen Sie die Assemblierung mit FEniCS durch und exportieren Sie die assemblierten Matrizen und das Gitter für die weitere Nutzung in Matlab.

Ziel ist die vorkonditionierte Lösung des Stokes-Problems in Matlab. Implementieren Sie den Rechtsvorkonditionierer

$$B_U = \begin{pmatrix} A & B^T \\ 0 & -C \end{pmatrix}$$

aus der Vorlesung. Lösen Sie dazu das Problem

$$\mathcal{A}B_U^{-1}y = \mathcal{F}$$

mit GMRES und setzen Sie anschließend $x = B_U^{-1}y$. Implementieren Sie die GMRES-Variante aus der Vorlesung (Pseudocode: siehe unten).

Berechnung von $B_U^{-1}y$: Schreiben Sie die Inverse von B_U so, dass bei Anwendung von B_U^{-1} nur ein System mit A und eines mit C gelöst werden muss. Es ist bekannt, dass A Blockdiagonalform hat, d.h. $A = \operatorname{blkdiag}(A_1, A_1)$. Damit kann $A^{-1}v$ über $A_1^{-1}v_1$, $A_1^{-1}v_2$ bestimmt werden.

Lösen Sie die Systeme $A_1^{-1}w$ bzw. $C^{-1}w$ mit dem PCG-Verfahren; nutzen Sie dazu einen additiven überlappenden Schwarz-Vorkonditionierer: Dazu teilen Sie das (strukturierte) Gitter in $N \times N$ $(N = 4)$ Teilgebiete auf. Seien die zugehörigen Indizes der Knoten mit T_i bezeichnet und die entsprechenden Restriktionsmatrizen bzw. Prolongationsmatrizen mit R_i bzw. R_i^T. Dann ist der Vorkonditionierer gegeben durch

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^{N^2} R_i^T H_{T_i,T_i}^{-1} R_i.$$

Hierbei sei H entweder A_1 oder C. Anstatt H_{T_i,T_i} zu invertieren, nutzen Sie die Cholesky-Zerlegung.

Wählen Sie stets das relative Residuum als Abbruchbedingung. Für die CG-Verfahren wählen Sie die Toleranz 10^{-8} und für das GMRES-Verfahren 10^{-6}.

Abgabe:

- **Theorie:** Bis Mittwoch, 26. Juni 2019, 14:00 Uhr,
- **Programme:** Bis Mittwoch, 03. Juli 2019, 14:00 Uhr,

im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

Algorithm 1 GMRES (mod. Gram-Schmidt)

$m :=$ maxIter, $r_0 = b - Ax_0$, $\beta = ||r_0||_2$, $v_1 = \frac{r_0}{\beta}$, $g = \beta e_1$, $e_1 \in \mathbb{R}^{m+1}$
for $j = 1, 2, \dots, m$ **do**
  Arnoldi-Prozess mit mod. Gram-Schmidt-Orthogonalisierung.
  $w_j := Av_j$
  for $i = 1, \dots, j$ **do**
    $h_{ij} := \big(w_j, v_i\big)_2$
    $w_j = w_j - h_{ij}v_i$
  end for
  $h_{j+1,j} := ||w_j||_2$
  if $h_{j+1,j} > 0$ **then**
    $v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$
  end if

  Transformation der Hessenbergmatrix in obere Dreiecksform.
  for $i = 1, \dots, j-1$ **do**
    $H(1:j, j) = \text{givens\_rot}(H(1:j,j), c_i, s_i, i)$
  end for
  $p = \sqrt{H_{jj}^2 + H_{j+1,j}^2}$,
  $s_j = H_{j+1,j}/p$, $c_j = H_{j,j}/p$
  $H(1:j+1, 1:j) = \text{givens\_rot}(H(1:j+1,1:j), c_j, s_j, j)$
  $g(1:j+1) = \text{givens\_rot}(g(1:j+1), c_j, s_j, j)$

  $r = |g_{j+1}|/\beta$ (Residuum)
  if $r < tol$ **then**
    break
  end if
end for
Löse $H(1:j, 1:j)y = g(1:j)$
$x = x_0 + (v_1, \dots, v_j)y$

function M = GIVENS_ROT(M,c_i,s_i,i)
  $a = M(i,:)$, $b = M(i+1,:)$
  $M(i,:) = c_i a + s_i b$
  $M(i+1,:) = -s_i a + c_i b$
end function