DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

03. Juli 2019

13. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen II

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es seien M^{-1} und A symmetrisch positiv definit und $P_{ad} := M^{-1}A$. Es sei $a(\cdot,\cdot)$ die Bilinearform, die zu A gehört. Zeigen Sie, dass mit

$$\lambda_{\min}^{A}(P_{ad}) := \min_{x\neq 0} \frac{a(P_{ad}x,x)}{a(x,x)}, \quad \lambda_{\max}^{A}(P_{ad}) := \max_{x\neq 0} \frac{a(P_{ad}x,x)}{a(x,x)},$$

die Konditionszahl bezüglich des a-inneren Produkts,

$$\kappa_A(P_{ad}) := \frac{\lambda_{\max}^{A}(P_{ad})}{\lambda_{\min}^{A}(P_{ad})},$$

mit

$$\kappa(P_{ad}) := \frac{\lambda_{\max}(P_{ad})}{\lambda_{\min}(P_{ad})}$$

übereinstimmt.

Bemerkung: Im Allgemeinen gilt für die spektrale Konditionszahl $\kappa_2(P_{ad}) \neq \kappa(P_{ad})$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Formulieren Sie den überlappenden Schwarz-Vorkonditionierer mit einem Level so, dass er als Block-Jacobi-Vorkonditionierer[1] geschrieben werden kann. Sie dürfen notwendige Annahmen treffen, damit die involvierten Probleme wohldefiniert sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei ε aus der starken Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Zeigen Sie, dass der Spektralradius

$$\rho(\varepsilon) \leq N^C$$

erfüllt, wobei N^C die maximale Anzahl an Nicht-Nulleinträge einer Zeile von ε ist. N^C gibt für ein beliebiges überlappendes Teilgebiet folglich an, mit wie vielen anderen überlappenden Teilgebieten es maximal „interagiert".

Bemerkung: N^C wird in der Abschätzung des größten Eigenwertes des additiven Schwarz-Operators verwendet. Für exakte Löser gilt dann $\lambda_{\max} \leq (N^C + 1)$. Es geht allerdings auch besser. So steht bei [2] nach Lemma 3.11, dass N^C ersetzt werden kann durch die maximale Anzahl an überlappenden Gebieten, zu denen ein Knoten gehört.

[1]Block-Jacobi: Sei $A_D = \delta_{ij}A_{ij}$ die Diagonale einer Matrix A, dann ist der Jacobi-Vorkonditionierer definiert als $M^{-1} := A_D^{-1}$. Wendet man dasselbe Prinzip auf Blöcke einer Matrix an, erhält man den Block-Jacobi-Vorkonditionierer.

[2]Toselli, Widlund, 2005, *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*

Aufgabe 4: (8 Bonuspunkte)
Implementieren Sie in Matlab für das Poissonproblem (skalieren Sie die rechte Seite der DGL zudem mit $\frac{1}{0.0737}$) auf dem Einheitsquadrat eine Finite-Elemente-Methode. Nutzen Sie ein strukturiertes Gitter mit $2{\cdot}100^2$ vielen $\mathcal{P}_1$-Dreiecken. Teilen Sie das Gebiet in 10^2 viele quadratische Teilgebiet auf, die sich nur die Interfaceknoten teilen und definieren Sie darauf den überlappenden additiven Schwarz-Vorkonditionierer mit einem Level (wie in den Programmieraufgaben auf Blatt 11 und 12). Nutzen Sie nun Ihre PCG-Implementierung, um die ersten 30 Iterierten in einer Art Film zu plotten. Nutzen Sie nach jedem Plotaufruf die Befehle `pause(0.2)` und `zlim([0,1])`.

- Was fällt Ihnen im Bezug auf Skalierbarkeit auf?

Abgabe: Bis Mittwoch, 10. Juli 2019, 14:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.