MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

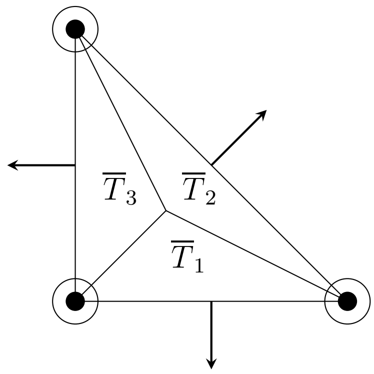
Sommersemester 2016

23. Juni 2016

10. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Betrachten Sie das **H**sieh-**C**lough-**T**ocher-Element



mit dem Einheitsdreieck $T = \bigcup_{k=1}^{3} \overline{T}_k$, wobei $\overline{T}_k$ die Dreiecke sind die durch Verbinden der Ecken $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (0,1)$, $a_3 = (1,0)$, mit dem Schwerpunkt entstehen. Sei

$$\Pi := \{p \in C^1(T) | p_{|\overline{T}_i} \in \mathcal{P}_3, \quad \dim(\Pi_{\text{ref}}) = 12\} \text{ und}$$

$$\Sigma = \{\sigma_i = p(a_i), \sigma_{i+3} = \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \sigma_{i+6} = \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \sigma_{i+9} = \frac{\partial p}{\partial \nu}(m_i), i = 1,2,3\},$$

wobei ν die äußere Normale bezeichnet und m_i, $i = 1,2,3$ die Mittelpunkte der Seiten sind. Zeigen Sie: $V^h \subset C^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Zeigen Sie für die quadratischen Elemente der Serendipity-Klasse

$$||u - I^h u||_{H^m(\Omega)} \leq c h^{k-m} |u|_{H^k(\Omega)}$$

für $u \in H^k(\Omega)$, $m = 0,1$ und $k = 2,3$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Beweisen Sie das Bramble-Hilbert-Lemma für $k = 1$, indem Sie die Interpolierte Iu als Integralmittelwert

$$Iu := \frac{\int_\Omega u \, dx}{\int_\Omega 1 \, dx}$$

definieren.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Die auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ sei eine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Funktionen

$$\delta_\lambda(x) := \lambda \cdot x \qquad \text{und} \qquad \tau_c(x) := x + c$$

definieren eine Skalierung um $\lambda > 0$, bzw. eine Translation entlang eines Vektors $c \in \mathbb{R}^n$. Leiten Sie jeweils eine partielle Differentialgleichung (auf einem passenden Gebiet) her, die von der entsprechenden Funktion

$$u_\lambda := u \circ \delta_\lambda \qquad \text{und} \qquad u_c := u \circ \tau_c$$

gelöst wird.

Abgabedatum: 30. Juni 2016 bis 12:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.