MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

30. Juni 2016

11. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Hinweis 2: Dieses Blatt beinhaltet eine Programmieraufgabe. Für die Zulassung zur Klausur müssen **alle** Programmieraufgaben erfolgreich bearbeitet werden. Es muss in jedem Fall eine Abgabe erfolgen und es sollte eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Aufgabe zu erkennen sein.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei Ω_α in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\Omega_\alpha := \{P(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq r < 1) \wedge (0 < \phi < \alpha\pi)\},$$

wobei $0 < \alpha < 2$. Lösen Sie

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega_\alpha \\ u &= \sin\left(\frac{\phi}{\alpha}\right) && \text{auf } \partial\Omega_\alpha\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Trennung der Veränderlichen mit dem Ansatz $u(r,\phi) = r^\lambda F(\phi)$, $\lambda = 1/\alpha$, Laplace in Polarkoordinaten.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Familie von Dreieckszerlegungen $(\tau_h)_h$ genau dann regulär ist, wenn Zlámals Bedingung

$$\exists \Theta_0 > 0 \; \forall h \; \forall T \in \tau_h : \qquad \Theta_T \geq \Theta_0 > 0$$

erfüllt ist. Dabei sei Θ_T der kleinste innere Winkel des Dreiecks T.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Sei $(\tau_h)_h$ eine quasi-uniforme Familie von regulären Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie für $u_h \in V^h$ und zwei von h unabhängige Konstanten c und C

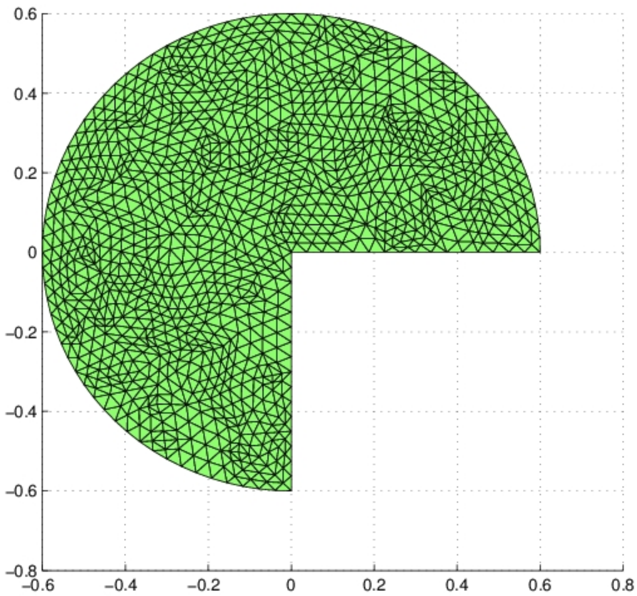
$$c\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq h^2 \sum_{i=1}^{N} |u_h(z_i)|^2 \leq C\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\ ,$$

wobei die z_i die Knoten der Basis darstellen und der Finite-Elemente Raum so gewählt ist, dass die Funktionale nur aus Punktauswertungen bestehen.

Programmieraufgabe (15 Punkte)
In den Matlab-Dateien `pacman_dreiecke.dat`, `pacman_punkte.dat` und `pacman_randlinien.dat` in `pacman_geometrie.zip` auf `http://www.mi.uni-koeln.de/numerik/file/pacman_geometrie.zip` findet sich eine Diskretisierung des Gebietes

$$\Omega_{3/2} := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq r < 0.6) \wedge (0 < \phi < (3/2)\,\pi)\}$$

in der Form von Knoten-, Dreieckselement- und Randelement-Listen (siehe Abbildung).



Lesen Sie diese Geometrie in Ihr FEM-Programm ein (`load ***.dat`) und lösen Sie die PDGL

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega_{3/2} \\ u &= \sin\left(\frac{2}{3}\,\phi\right) && \text{auf } \partial\Omega_{3/2}\,. \end{aligned}$$

Vergleichen Sie die Lösung mit der exakten Lösung aus Aufgabe 1 und stellen Sie den Fehler graphisch dar.
Hinweis: Achtung! Verglichen mit der exakten Lösung aus Aufgabe 1, wurde das „Pacman"-Gebiet mit dem Faktor 0.6 skaliert. Betrachten Sie dazu Aufgabe 4 aus Übungsblatt 10.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die folgenden E-Mail-Adressen schicken:

  Montagsgruppe: `Darius.Deges@gmx.net`

  Dienstagsgruppe: `lgutberl@smail.uni-koeln.de`

  Schreiben Sie im Subject/Betreff die Nr. des Übungsblattes und Ihren Namen à la:

```
Subject: Uebung1, Muster, Hans
Subject: Uebung1, Muster, Lisa
```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum: 7. Juli 2016 bis 12:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.