MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

7. Juli 2016

12. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$. Zeigen Sie, dass eine von $h := \max_{T\in\tau_h} h_T$ unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\min_{T\in\tau_h} h_T}\|v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V^h\,.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, h wie in Aufgabe 1 und sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von Ω. Zeigen Sie, dass für die Kondition der Massenmatrix $M := (\langle \phi_i, \phi_j\rangle_{L^2(\Omega)})_{i,j}$ gilt

$$\kappa(M) \leq C\left(\frac{h}{\min_{T\in\tau_h} h_T}\right)^d .$$

Was gilt im Fall einer quasi-uniformen Familie von Triangulierungen?

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen und h wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für die Kondition der Steifigkeitsmatrix K gilt

$$\kappa(K) \leq C\,h^d\left(\min_{T\in\tau_h} h_T\right)^{-(d+2)} .$$

Abgabedatum: 14. Juli 2016 bis 12:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.