MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

14. April 2016

1. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Leiten Sie die Variationsformulierung des folgenden Randwertproblems her.

Finde eine Funktion $u(x) \in \mathcal{C}^2((-1,1)) \cap \mathcal{C}^0([-1,1])$, s.d. mit $a(x) \in \mathcal{C}^1((-1,1)) \cap \mathcal{C}^0([-1,1])$ und $f \in \mathcal{C}^0((-1,1))$

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' &= f, \quad x \in (-1,1), \\ u'(-1) &= 0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Zeigen Sie die Poincarésche Ungleichung in folgender Version für alle $u \in H^1(0,1)$: Es existiert eine Konstante $C > 0$, s.d.

$$||u||_{L_2(0,1)} \leq C \left(\overline{u}^2 + |u|^2_{H^1(0,1)} \right)^{1/2}$$

mit dem Mittelwert $\overline{u} = \int_0^1 u(x)dx$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei $\Omega = (-r, r) \subset \mathbb{R}$ mit $0 < r < \infty$ und f definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ 1 - x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion schwach differenzierbar? Falls ja, wie lautet ihre schwache Ableitung?

Abgabedatum: 21. April 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.