MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

28. April 2016

3. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Sei $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrisch positiv definite Bilinearform über einem Vektorraum V. Sei $F : V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Das lineare Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - F(v).$$

Zeigen Sie:

1. $J(u) = \inf_{v \in V} J(v) \Leftrightarrow a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V.$
2. Es existiert höchstens eine Minimallösung.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $v \in C^2(0,1)$ Lösung der Poisson-Gleichung, $f \in C(0,1)$ und I^h die stückweise lineare Knoteninterpolierende. Zeigen Sie:

$$||v - I^h v||_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 ||f||_{L^2(0,1)}$$

wobei $C > 0$ eine von h unabhängige Konstante ist.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Sei V' der Dualraum von V. Zeigen Sie:

$$||T||_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|T(v)|}{||v||_V}$$

ist eine Norm auf V'.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $a(u,v) := \int_0^1 u'v' + u'v + uv\,dx$ und sei $V := \{v \in H^1((0,1)) : v(0) = v(1) = 0\}$.
Zeigen Sie

$$a(v,v) := \int_0^1 (v')^2 + v^2\,dx \qquad \forall v \in V.$$

Abgabedatum: 6. Mai 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.