MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

4. Mai 2016

4. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Seien $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x \in (1,2) \\ 0, & x = 2 \\ 3-x, & x \in (2,3) \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

definiert. Gilt

a) $f \in H_0^1([0,3])$?

b) $g \in H_0^1([0,1])$?

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $s > 0$. Zeigen Sie

$$|v|_{H^m(\Omega)} \leq ||v||_{H^m(\Omega)} \leq (1+s)^m |v|_{H^m(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^m(\Omega).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie

$$H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega).$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}\}$ und sei $v(x,y) := \ln|\ln(\sqrt{x^2+y^2})|$. Zeigen Sie:

$$v \in H^1(\Omega).$$

Abgabedatum: 12. Mai 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.