MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

Sommersemester 2016

12. Mai 2016

5. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Sei $\Omega := (-1, 1)$ und $u(x) := \sqrt{|x|}$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $u \in H^k(\Omega)$?

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet, und $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ habe ein positives Oberflächenmaß, d.h. Γ_0 ist im $d-1$-dimensionalen Lesbegue-Maß ungleich null: $\lambda_{d-1}(\Gamma_0) \neq 0$. Zeigen Sie: $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_0\}$ ist mit dem inneren Produkt

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}$$

ein Hilbertraum.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet, $k \in \mathbb{N}$, und seien $f_i : H^k(\Omega) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$ mit $l \in \mathbb{N}$, lineare, stetige Funktionale mit der Eigenschaft

$$\forall\, v \in \mathcal{P}_{k-1} : \sum_{i=1}^{l} (f_i(v))^2 = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

wobei $\mathcal{P}_{k-1}$ die Polynome vom Grad $\leq k-1$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für $u \in H^k(\Omega)$ gilt

$$C||u||^2_{H^k(\Omega)} \leq |u|^2_{H^k(\Omega)} + \sum_{i=1}^{l} (f_i(u))^2.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\forall v \in H^1(\Omega) : ||v||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left(|\overline{v}|^2 + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right).$$

Dabei sei

$$\overline{v} = \frac{\int_\Omega v dx}{\int_\Omega 1 dx}.$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet und $\Gamma := \partial\Omega$. Für $u \in C^\infty(\Gamma)$ sei

$$||u||_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v_{|\Gamma} = u}} ||v||_{H^1(\Omega)}.$$

Zeigen Sie, dass $||.||_{H^{1/2}(\Gamma)}$ eine Norm auf $C^\infty(\Gamma)$ ist.

Abgabedatum: 25. Mai 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.