MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

25. Mai 2016

6. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass die klassische Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nicht immer in $H^1(\Omega)$ liegt.

Betrachten Sie dazu die Funktion

$$\mathring{u}(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \frac{\sin(n!\phi)}{n^2}$$

auf der Einheitskreisscheibe $\Omega := K_1(0)$, wobei (r, ϕ) die entsprechenden Polarkoordinaten sind. Wählen Sie eine passende Randwertfunktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Hinweis: Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten hat die Form

$$\mathring{\Delta}_{r,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Sie können außerdem die $L_2(0, 2\pi)$-Orthogonalitäten

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\varphi)\sin(m\varphi) = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi)\cos(m\varphi) = 0$$

für $m,\ n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet. Sei $u \in H^1(\Omega)$ gegeben. Finden Sie ein $v \in H^1(\Omega)$ mit den gleichen Randwerten und minimaler $H^1(\Omega)$-Seminorm.

Aufgabe 3: (7 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet. Leiten Sie für die klassische Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$\int_\Omega u dx = 0$$

eine Variationsformulierung her und zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllt sind.

Aufgabe 4: (9 Punkte)
Es sei $S_{1,t} = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r \in (0, 1), \phi \in (0, \pi/t) \text{ mit } t > 1/2\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $u = r^t \sin(t\phi)$ in $H^1(S_{1,t})$ liegt.

Abgabedatum: 2. Juni 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.