MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2016

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

2. Juni 2016

7. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Hinweis 2: Dieses Blatt beinhaltet eine Programmieraufgabe. Für die Zulassung zur Klausur müssen **alle** Programmieraufgaben erfolgreich bearbeitet werden. Es muss in jedem Fall eine Abgabe erfolgen und es sollte eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Aufgabe zu erkennen sein.

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Sei τ eine zulässige Triangulierung für ein Polygon Ω, welches ein Lipschitzgebiet ist. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\textit{Anzahl Dreiecke} + \textit{Anzahl Eckpunkte} - \textit{Anzahl Kanten} = 1.$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Sei $\widehat{T}$ das Referenzdreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Sei

$$I(r,s) = \int_{\widehat{T}} x^r y^s \, d(x,y)$$

mit $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie:

$$I(r,s) = \frac{r!s!}{(2+r+s)!}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $I(r+1, s-1) = \frac{r+1}{s} I(r,s)$, $s \geq 1$.

Aufgabe 3: (7 Punkte)
Sei T ein Dreieck mit den Seitenmittelpunkten m_i^T, $i = 1,2,3$ und $\widehat{T}$ das Referenzdreieck aus Aufgabe 2 mit den Seitenmittelpunkten $m_i^{\widehat{T}}$, $i = 1,2,3$. Zeigen Sie: Für alle Polynome p mit Grad höchstens zwei gilt

$$\int_T p dx = \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^{3} p\left(m_i^T\right).$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\int_{\widehat{T}} p dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} p\left(m_i^{\widehat{T}}\right).$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und durch $Q_I(f) := \sum_{k=0}^{n_Q-1} w_k f(x_k)$ eine Quadraturformel der Ordnung r gegeben. Zeigen Sie, dass durch

$$Q_T(f) := \sum_{k,l=0}^{n_Q-1} w_k w_l f(x_k, x_l)$$

eine Quadraturformel der Ordnung r auf dem Einheitsviereck $T = [0, 1] \times [0, 1]$ gegeben ist, d.h. alle Polynome aus $\text{span}\{x^\alpha y^\beta,\ 0 \leq \alpha \leq r - 1,\ 0 \leq \beta \leq r - 1\}$ werden exakt integriert.

Abgabedatum der schriftlichen Aufgaben: 9. Juni 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

Programmieraufgabe: (5 Punkte) Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion, die als Eingabewerte die Eckpunkte eines Dreiecks und eine Funktion der rechten Seite übergeben bekommt. Die Funktion soll damit die lokale Elementsteifigkeitsmatrix und lokale rechte Seite einer mit der Finite Elemente Methode diskretisierten Variationsformulierung der Poisson-Gleichung berechnen. Die Diskretisierung soll mithilfe von stückweisen linearen Knotenbasisfunktionen (d.h. die Basisfunktionen eingeschränkt auf das Dreieck sind linear) erfolgen. Die Funktion soll die Matrix

$$K_T = \begin{pmatrix} \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1\,dx & \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\,dx & \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_3\,dx \\ \int_T \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1\,dx & \int_T \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2\,dx & \int_T \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_3\,dx \\ \int_T \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_1\,dx & \int_T \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_2\,dx & \int_T \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_3\,dx \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite

$$b_T = \begin{pmatrix} \int_T f(x)\varphi_1(x)\,dx \\ \int_T f(x)\varphi_2(x)\,dx \\ \int_T f(x)\varphi_3(x)\,dx \end{pmatrix}$$

ausgeben. Testen Sie Ihre Funktion an dem Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 2)$, $(3/2, 2)$ und $(3/2, 5/2)$ und der Funktion $f(x, y) = 1$ für die rechte Seite. Geben Sie einen Ausdruck der Ausgabe zusammen mit dem Quellcode ab.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die folgenden E-Mail-Adressen schicken:

  Montagsgruppe: `Darius.Deges@gmx.net`

  Dienstagsgruppe: `lgutberl@smail.uni-koeln.de`

  Schreiben Sie im Subject/Betreff die Nr. des Übungsblattes und Ihren Namen à la:

```
Subject: Uebung1, Muster, Hans
Subject: Uebung1, Muster, Lisa
```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum der Programmieraufgabe: Montag, 13.06. bis 12:00 Uhr per E-mail und als Ausdruck im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.