

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

16. Juni 2016

9. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei \mathcal{P}_k^n der Raum der Polynome vom Grad $\leq k$ in n Variablen. Zeigen Sie

$$\dim \mathcal{P}_k^n = \binom{n+k}{k}.$$

Aufgabe 2 (7 + 3 = 10 Punkte)

- (i) Sei \hat{T} das Referenzdreieck mit den Eckpunkten $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ und $\hat{a}_3 = (0, 1)$ und den Seitenmittelpunkten \hat{m}_i , $i = 1, 2, 3$, wobei \hat{m}_1 der Mittelpunkt der Seite (\hat{a}_2, \hat{a}_3) , \hat{m}_2 der Mittelpunkt der Seite (\hat{a}_3, \hat{a}_1) und \hat{m}_3 der Mittelpunkt der Seite (\hat{a}_1, \hat{a}_2) ist. Sind die folgenden Tripel (\hat{T}, Π, Σ) Finite Elemente im Sinne von Ciarlet?

1. Π konstante Funktionen, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mit

$$\sigma_1(v) = v(\hat{a}_1), \quad \sigma_2(v) = v(\hat{a}_2), \quad \sigma_3(v) = v(\hat{a}_3),$$

2. Π konstante Funktionen, $\Sigma = \{\sigma_1\}$ mit

$$\sigma_1(v) = \frac{\int_{\hat{T}} v(x, y) dx dy}{\int_{\hat{T}} dx dy},$$

3. Π Polynome vom Grad 2, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ mit $\sigma_i(v) = v(\hat{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$ und $\sigma_{i+3}(v) = \nabla v(\hat{m}_i) \cdot \overline{\hat{m}_i \hat{a}_i}$, $i = 1, 2, 3$, wobei $\overline{\hat{m}_i \hat{a}_i}$ den Vektor mit den Endpunkten \hat{m}_i, \hat{a}_i bezeichnet.

- (ii) Sei \hat{T} nun das Referenztetraeder mit den Eckpunkten $\hat{a}_1 = (0, 0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\hat{a}_3 = (0, 1, 0)$ und $\hat{a}_4 = (0, 0, 1)$ und seien Π Polynome vom Grad 1 und die Funktionale $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ mit $\sigma_i(v) = v(\hat{a}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ gegeben. Ist das Tripel (\hat{T}, Π, Σ) ein Finites Element im Sinne von Ciarlet?

Abgabedatum: 23. Juni 2016 bis 12:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.