

Numerische Softwareentwicklung in C und C++

Wintersemester 2016/17

Projekt Wellengleichung

(Aufgaben 1 und 2 zählen als Übungsaufgabe)

Aufgabe 1

Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung eines C-Programms, welches numerische Lösungen der Wellengleichung in einer Raumdimension

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], t \in [0, 2] \quad (1a)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1] \quad (1b)$$

und

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (1c)$$

sowie den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 2] \quad (1d)$$

berechnet.

Betrachten Sie zunächst eine Semidiskretisierung im Raum, um ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (in t) der Form

$$\mathbf{u}''(t) + A\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2a)$$

mit den Anfangswerten

$$\mathbf{u}(0) \quad \text{und} \quad \mathbf{u}'(0) \quad (2b)$$

zu erhalten. Schreiben Sie anschließend das System (2) in ein System 1. Ordnung der Form

$$\mathbf{v}'(t) = F(t, \mathbf{v}(t)) \quad (3)$$

um.

(a) Wenden Sie das Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{v}_k + \Delta t F(\mathbf{v}^{(1)}) \\ \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta t (F(\mathbf{v}^{(1)}) + F(\mathbf{v}^{(2)})) \\ \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta t (F(\mathbf{v}^{(1)}) + F(\mathbf{v}^{(3)}))\end{aligned}$$

auf das System 1. Ordnung an, wobei $\Delta t = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{v}_k \approx \mathbf{v}(t_k)$, $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, m$.

(b) Verwenden Sie das implizite Euler-Verfahren

Nutzen Sie die folgende Analytische Lösung um den Fehler für $t = T$ zu berechnen und geben Sie diesen aus.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sin(\pi(x - t)) + \frac{1}{2} \sin(\pi(x + t))$$

Testen Sie Ihr Programm mit den veränderten Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1 - x) & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Visualisieren Sie die Ergebnisse mit *Paraview* und geben sie die Plots für die zwei Anfangswertprobleme mit ab.

Schreiben sie ein `Makefile` um das Programm zu übersetzen.

Aufgabe 2

Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung eines C-Programms, welches numerische Lösungen der Wellengleichung in *zwei* Raumdimensionen

$$u_{tt}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1]^2, t \in [0, 2] \quad (4a)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \quad (4b)$$

und

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \quad (4c)$$

sowie homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in [0, 2] \quad (4d)$$

berechnet.

- (a) Wenden Sie das Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung.
- (b) Verwenden Sie das implizite Euler-Verfahren.

Visualisieren Sie die Ergebnisse mit *Paraview* für $t = 0$ und $t = 2$ und geben sie die Plots mit ab. Schreiben sie ein **Makefile** um das Programm zu übersetzen.

Aufgabe 3 (Projektaufgabe)

- Fertigen Sie eine schriftliche Ausarbeitung zu Aufgabe 1 an, in der Sie Ihr Vorgehen beschreiben. Die Ausarbeitung sollte mit einer kurzen Problembeschreibung beginnen. Erläutern Sie im Folgenden Ihre Diskretisierungen und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
- Beschreiben Sie die Vor- und Nachteile der beiden Zeitschrittverfahren ausgehend von Ihren Ergebnissen. Testen Sie ggf. auch andere Zeitintervalle als die oben gegebenen.

Abgabe Aufgaben 1 und 2 bis **07.12.2016** um **12:00 Uhr**, Aufgabe 3 bis **21.12.2016** um **12:00 Uhr** per Email an c.hochmuth@uni-koeln.de. Die Abgabe soll in Form eines Archivs erfolgen.