MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Dr. Stephanie Friedhoff, Christian Hochmuth

Numerische Softwareentwicklung in C und C++

Wintersemester 2016/17

Übung 9

Aufgabe 1

(a) Ergänzen, kompilieren und testen Sie die Implementierung des in der Vorlesung behandelten FEM-Algorithmus zur numerischen Lösung der Poissongleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ihr Ordner *fem* sollte am Ende wie folgt aussehen:

```
fem $ ls -F

array.h@          plot_mesh.h@       triangle.o@
fem_demo.c        poisson.c          twb_quad.c@
Makefile          poisson.h          twb_quad.h@
mesh.c@           problem_spec.c     xmalloc.c@
mesh.h@           problem_spec.h@    xmalloc.h@
plot_mesh.c@      triangle.h@
```

Testen Sie Ihr Programm mit dem Testproblem *Poisson1* der Vorlesung

- Ω ist das Einheitsquadrat $(0, 1) \times (0, 1)$
- Rechte Seite $f(x, y) = 32(x(1 - x) + y(1 - y))$
- Exakte Lösung $u_{\text{ex}}(x, y) = 16xy(1 - x)(1 - y)$
- Dirichlet-Randbedingungen gemäß Abbildung 1 (a)

Vergleichslösung:

```
$ ./fem_demo 10 0.002
Gebiet ist das Einheitsquadrat (Testproblem Poisson1)
Knoten = 431, Kanten = 1226, Elemente = 796
Steifigkeitsmatrix hat Dimension 431x431 (=185761) und
2479 Nichtnull-Eintraege
Fehler:
  L^infty = 0.0103488,
  L^2 = 0.00290014,
  Energienorm = 0.168413
```

- Hinweis, dass Ergebnisse leicht abweichen können, da aufgrund von systemabhängiger Gleitkomma-Approximation das von *Triangle* erzeugte Dreiecksgitter leicht variieren kann, siehe

  http://userpages.umbc.edu/~rostamia/cbook/fem1.html

(b) Erweitern Sie Ihr Programm aus Aufgabenteil (a) für inhomogene Dirichlet Randbedingungen,

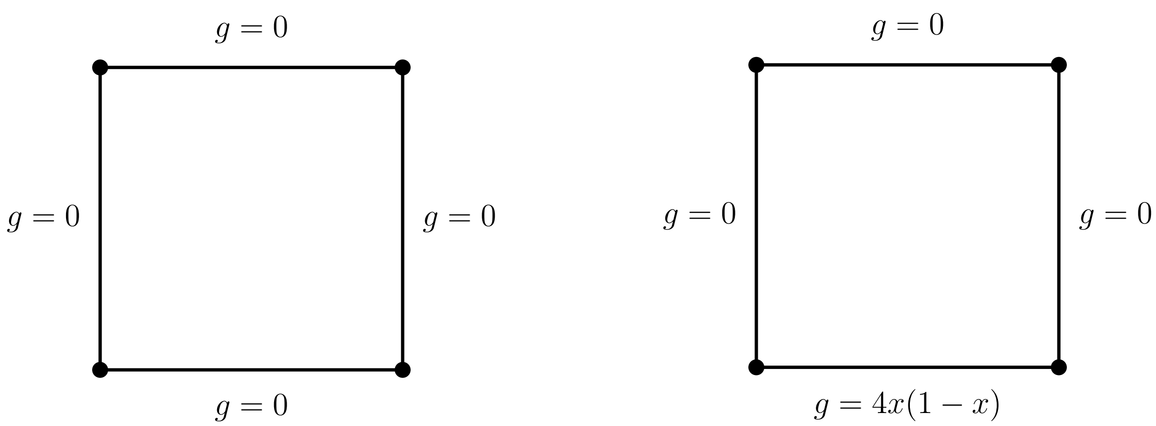
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Insbesondere sollte die Funktion `enforce_zero_dirichlet_bc ()` ersetzt werden.

Testen Sie Ihr Programm mit dem folgenden Testproblem:
Poisson5

- Ω ist das Einheitsquadrat $(0, 1) \times (0, 1)$
- Rechte Seite $f(x, y) = -32x(1-x) + 8y(1-y)(1-4y)$
- Exakte Lösung $u_{\text{ex}}(x, y) = 4x(1-x)(1-y)(1-4y)$
- Dirichlet-Randbedingungen gemäß Abbildung 1 (b)

Beachten Sie, dass Sie ggf. die Datei *problem_spec.h* modifizieren müssen, um den Prototypen des neuen Testproblems zu definieren.

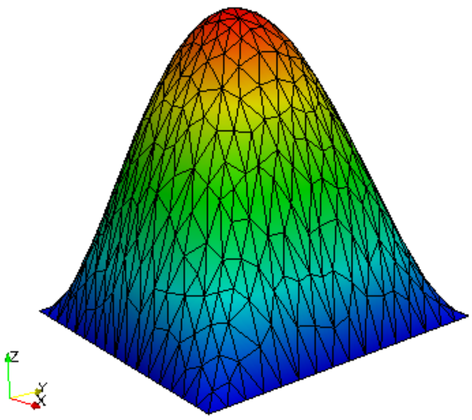


(a) Homogene Dirichlet RB   (b) Inhomogene Dirichlet RB

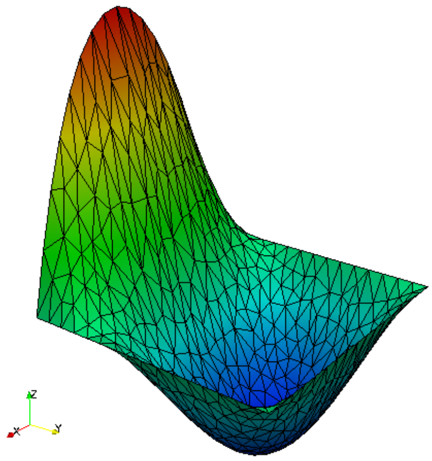
Abbildung 1: Gebiete und Dirichlet-Randbedingungen der Testprobleme aus Aufgabe 1 (a) und (b).

Vergleichslösung:

```
$ ./fem_demo 10 0.002
Gebiet ist das Einheitsquadrat (Testproblem Poisson5)
Knoten = 431, Kanten = 1226, Elemente = 796
Steifigkeitsmatrix hat Dimension 431x431 (=185761) und
2479 Nichtnull-Eintraege
Fehler:
  L^infty = 0.0115522,
  L^2 = 0.0021946,
  Energienorm = 0.115589
```



(a) Homogene Dirichlet RB



(b) Inhomogene Dirichlet RB

Abbildung 2: Lösungen der Testprobleme aus Aufgabe 1 (a) und (b).

Aufgabe 2

Erweitern Sie Ihr Programm, sodass Sie Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot n &= h \quad \text{auf } \Gamma_N, \end{aligned}$$

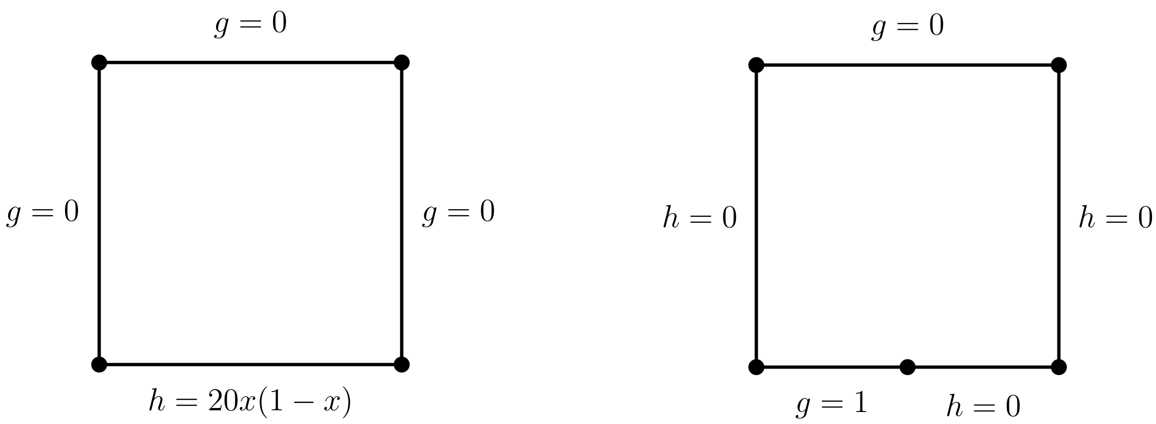
wobei Γ_D und Γ_N mit $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ den Dirichlet- und Neummanrand bezeichnen und n der äußere Normalenvektor an $\partial\Omega$ ist, d. h. Poissongleichungen mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen mit dem FEM-Algorithmus lösen können.

Testen Sie Ihr Programm mit den folgenden Testproblemen:
Poisson6

- Ω ist das Einheitsquadrat $(0,1) \times (0,1)$
- Rechte Seite $f(x,y) = -32x(1-x) + 8y(1-y)(1-4y)$ (wie in Aufgabe 1 (b))
- Exakte Lösung $u_{\text{ex}}(x,y) = 4x(1-x)(1-y)(1-4y)$ (wie in Aufgabe 1 (b))
- Randbedingungen gemäß Abbildung 3 (a)

Poisson7

- Ω ist das Einheitsquadrat $(0,1) \times (0,1)$
- Rechte Seite $f(x,y) \equiv 0$
- Randbedingungen gemäß Abbildung 3 (b)



(a) Testproblem *Poisson6*

(b) Testproblem *Poisson7*

Abbildung 3: Gebiete und Randbedingungen der Testprobleme aus Aufgabe 2.

Hinweise:

- Das diskrete Variationsproblem lautet:
  Finde $u_h \in V_h$, so dass
  $$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} h v_h \, ds \qquad \forall v_h \in V_h,$$
  d. h. die Neumann-Randwerte modifizieren die rechte Seite des linearen Gleichungssystems
- Für die Anwendung von Neumann-Randbedingungen auf Elementebene (d. h. bei der Modifizierung von Elementsteifigkeitsvektoren) müssen Integrale entlang von Kanten, also Integrale über Intervalle, berechnet werden. Dazu können Gauß-Quadraturformeln verwendet werden.

- Sie können sich bei Ihrer Implementierung an Kapitel 26 aus

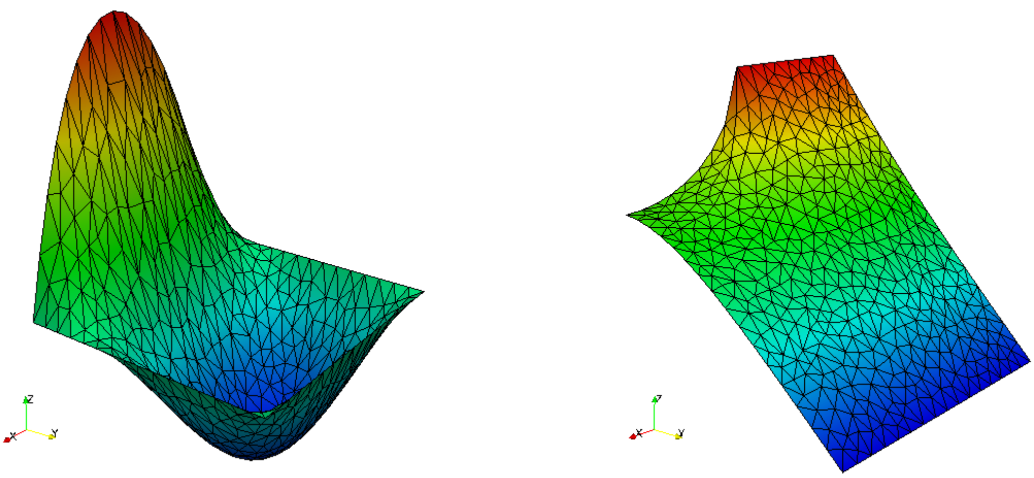
  Rouben Rostamian, *Programming Projects in C for Students of Engineering, Science, and Mathematics*, SIAM, 2014

  (im Uninetzwerk als e-Book verfügbar) orientieren.

Vergleichslösungen:

```
$ ./fem_demo 10 0.002
Gebiet ist das Einheitsquadrat (Testproblem Poisson6)
Knoten = 431, Kanten = 1226, Elemente = 796
Steifigkeitsmatrix hat Dimension 431x431 (=185761) und
2575 Nichtnull-Eintraege
Fehler:
  L^infty = 0.0117174,
  L^2 = 0.00214429
  Energienorm = 0.0962225

Gebiet ist das Einheitsquadrat (Testproblem Poisson7)
Knoten = 430, Kanten = 1223, Elemente = 794
Steifigkeitsmatrix hat Dimension 430x430 (=184900) und
2710 Nichtnull-Eintraege
```



(a) Testproblem *Poisson6* (b) Testproblem *Poisson7*

Abbildung 4: Lösungen der Testprobleme aus Aufgabe 2.

Nutzen Sie beim packen des Archivs mit dem Befehl `tar` die Flag `-h` um die symbolischen Links aufzulösen.

Schreiben sie ein `Makefile` um die Programme zu übersetzen.

Abgabe bis **11.01.2017** um **12:00 Uhr** per Email an c.hochmuth@uni-koeln.de. Fügen Sie Ihrem Archiv auch die 4 Plots hinzu. Nicht kommentierter Quellcode zählt als nicht lauffähiges Programm.