

1. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$. Zudem Sei $\|x\|^2 := x^T x$. Zeigen Sie mit Hilfe analytischer Kriterien zur Existenz von Extremalstellen, dass die Minimierungsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

auf die Lösung der Normalgleichungen zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 2: (2+2+2+2 Punkte)

Für den gemeinsamen Einsatz dreier verschiedener Düngemittel d_1 , d_2 und d_3 in einem Landwirtschaftsbetrieb sei für fünf verschiedene Jahre der Ertrag e bekannt (vgl. nachstehende Tabelle). Es wird ein linearer Zusammenhang $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 = e$ angenommen.

Jahr	1	2	3	4	5
d_1	10	6	9	3	10
d_2	5	4	6	2	2
d_3	2	2	2	0	1
e	6	4	6	1	4

- Stellen Sie die Matrix A und rechte Seite b für das System $Ax = b$, welches durch die vermutete Beziehung $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 = e$ entsteht, auf.
- Zeigen Sie, dass das System $Ax = b$ im klassischen Sinne nicht lösbar ist.
- Stellen Sie eine entsprechende Minimierungsaufgabe, welche $\|r\|_2$ minimiert auf und leiten Sie daraus das lineare Ausgleichsproblem her.
- Lösen Sie das in iii) aufgestellte Ausgleichsproblem mit Matlab. Was schliessen Sie aus der Norm des berechneten Residuums?

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie $b \notin \text{range}(A)$.

ii) Berechnen Sie die Lösung x^* von $A^T Ax = A^T b$.

iii) Berechnen Sie $r(x^*)$ und $\|r(x^*)\|_2$.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit vollem Spaltenrang für $m \geq n$. Zeigen Sie:

i) $A^H A$ ist hermitesch positiv definit.

ii) $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$.

Abgabedatum: 27. April 2017 bis 14:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.