MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

4. Mai 2017

3. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Geben Sie mit Begründung an, ob die folgenden Zerlegungen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegungen von A sind.

i) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ii) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$

iii) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: (3 + 3 + 3 Punkte)

i) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$
$$||A||_2^2 = \rho(A^H A),$$
wobei $A^H := \overline{A}^T$ und $\rho(A^H A)$ der Spektralradius von $A^H A$ ist.

ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit betragsmäßig größtem Eigenwert $\lambda_{\max}$ und betragsmäßig kleinstem Eigenwert $\lambda_{\min}$. Zeigen Sie, dass sich die Kondition $\kappa = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2$ dann auch wie folgt schreiben läßt:
$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Beweisen Sie, dass gilt:
$$\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2$$

Aufgabe 3: (7 + 3 Punkte)

i) Seien $P_1, \ldots, P_n$ Orthogonalprojektionen der Form $P_i := q_i q_i^T$, wobei $q_1, ..., q_n$ ein Orthonormalsystem ist. Für $i \neq j$ gilt zudem $q_i \neq q_j$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{I} - \sum_{i=1}^{n} P_i = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{I} - P_i)$$

wobei I die Identität ist.

ii) In der Vorlesung wurden die Algorithmen des Gram-Schmidt-Verfahren (GS) und des modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) eingeführt. Begründen Sie ausführlich, warum die beide Verfahren (in exakter Arithmetik) mathematisch äquivalent sind.

Programmieraufgabe (5 + 4 + 6 Punkte)
In der letzten Programmieraufgabe haben Sie das klassische Gram-Schmidt-Verfahren programmiert (GS/CGS). Sie sollen nun sehen, daß das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) tatsächlich bessere numerische Ergebnisse liefern kann, obwohl es (in exakter Arithmetik) mathematisch äquivalent ist.

i) Programmieren Sie zuerst das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren. Nennen Sie die Funktion z.B. *qr_gram_schmidt_mod.*

ii) Schreiben Sie eine Funktion *orth_error*, die für eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ quantitativ angibt, wie stark die Spalten von X von einem Orthonormalsystem abweichen. Benutzen Sie dazu die folgende Abbildung

$$orth\_error : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, \infty), \quad orth\_error(X) := ||X^T X - I||_F^2 \,,$$

wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichne. Die Frobenius-Norm $||X||_F$ von $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist definiert durch

$$||X||_F := (\sum_{1\le i\le m} \sum_{1\le j\le n} X_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \,.$$

iii) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad ,$$

heißt eine Vandermonde-Matrix. Dabei ist $x \in \mathbb{R}^n$. Benutzen Sie die Funktion

```
function [V]= vandermonde(n)

x = 1:n;
for j = 1:n
    V(:,j) = x.^(j-1);
end
```

um eine Vandermondematrix $V(n)$ beliebiger Größe n zu erstellen. Schreiben Sie ein Programm, das für $n = 5, 10, \ldots, 150$ die Q-Faktoren von $V(n)$ per

(a) Gram-Schmidt Algorithmus

(b) Modifiziertem Gram-Schmidt Algorithmus

(c) qr-Funktion aus **matlab**

berechnet. Die Fehlerindikatoren $e_k = orth\_error(Q_k)$, $k = 1, 2, 3$ der drei Verfahren sollen (in der genannten Reihenfolge) als Zeilen einer Tabelle in Exponentialdarstellung ausgeben werden:

```
fprintf('%d: %e %e %e\n',n, e1, e2, e3);
```

Hinweis: Alle 3 Verfahren brechen auf unserem Referenz-Rechner bei $n = 145$ zusammen, d.h. sie liefern NaN-Einträge.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an Ihren Übungsleiter / Ihre Übungsleiterin mit Betreff der Form: `Uebung1, Nachname, Vorname` schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen bzw. die Aufgabe wird als unbearbeitet gewertet!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum: 11. Mai 2017 bis 14:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.