MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

Sommersemester 2017

11. Mai 2017

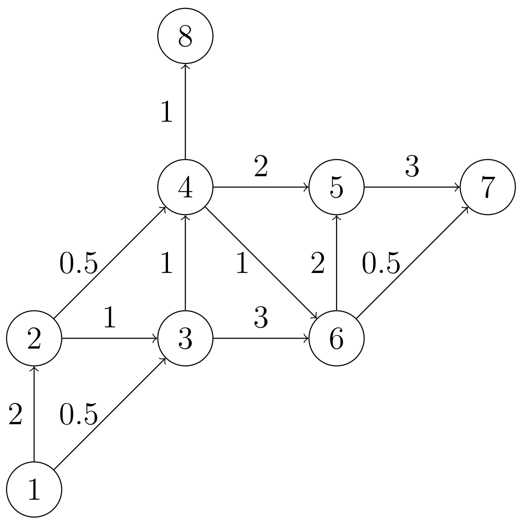
4. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (8 + 4 Punkte)
Betrachten Sie den unten stehenden, gerichteten Graphen. Fassen Sie diesen Graphen als schematische Darstellung eines elektrischen Netzwerks auf. An den Kanten ist die jeweilige elektrische Leitfähigkeit angegeben. An Knoten 1 befinde sich eine Quelle, die 2 Ampere in das Netzwerk einspeist. An den Knoten 7 und 8 befinden sich Senken, die jeweils 1 Ampere Strom aufnehmen.

1. Stellen Sie analog zur Vorlesung die Matrizen A und C sowie den Vektor f des Systems $A^TCAx = f$ auf, das dieses Netzwerk beschreibt. Geben Sie dazu eine Skizze des Systems mit ab, in der Sie die von Ihnen gewählte Nummerierung der Kanten angeben $(y_1, \ldots, y_{12})$.

2. Berechnen Sie die Potentiale indem Sie den \-Operator aus Matlab zum Lösen des Gleichungssystems verwenden. Geben Sie dabei A und C vor und berechnen Sie das System mit dem Computer. Erden Sie dabei den Knoten 2.
   Hinweis: Um die j-te Zeile der Matrix B zu streichen, können Sie den Befehl "$B(j, :) =$ [ ];" verwenden. Analog können Sie die j-te Spalte streichen, indem Sie "$B(:, j) =$ [ ];" verwenden.



Aufgabe 2: (8 Punkte)
Es sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

und ein beliebiger Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Gesucht ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
Zeigen Sie: Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren konvergieren für alle Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $|a| < 2$.

Aufgabe 3: (4 + 4 Punkte)
In der Vorlesung wurden sowohl eine Matrix-Form als auch eine komponentenweise Form des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens eingeführt. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, daß die beiden Formen jeweils äquivalent sind, also daß mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ gilt:

$$Dx^{(k+1)} + Lx^{(k)} + Rx^{(k)} = b \quad \Leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

und

$$(D+L)x^{(k+1)} + Rx^{(k)} = b \quad \Leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii} \,.$$

Die Matrizen D, L, R sind dabei wie in der Vorlesung definiert, d.h. D ist eine Diagonalmatrix, L eine strikte untere und R eine strikte obere Dreiecksmatrix, für die gilt: $A = L+D+R$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich das SOR-Verfahren, welches durch die Beziehung

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii} \,.$$

definiert ist, in der Form

$$x^{(k+1)} := Bx^{(k)} + c$$

mit $B = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega R)$, $c = \omega(D+\omega L)^{-1}b$ schreiben lässt. Die Matrizen D, L, R sind dabei wie in der Vorlesung definiert (vgl. auch Aufgabe 3).

Lösung: Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig aber fest. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii} \\
\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}\left(b - Lx^{(k+1)} - Rx^{(k)}\right) \\
&= (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}b - \omega D^{-1}Lx^{(k+1)} - \omega D^{-1}Rx^{(k)}.
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} + \omega D^{-1}Lx^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}b - \omega D^{-1}Rx^{(k)} \\
\Leftrightarrow \quad Dx^{(k+1)} + \omega Lx^{(k+1)} &= (1-\omega)Dx^{(k)} + \omega b - \omega Rx^{(k)} \\
\Leftrightarrow \quad (D+\omega L)x^{(k+1)} &= \big((1-\omega)D - \omega R\big)x^{(k)} + \omega b \\
\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}\big((1-\omega)D - \omega R\big)x^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}b
\end{aligned}$$

Abgabedatum: 18. Mai 2017 bis 14:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.