MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

18. Mai 2017

5. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (4+6 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

mit $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i},\ i = 1, 2$ und $B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$. Betrachten Sie die Iterationsverfahren

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x_1^{(k+1)} & + & B x_2^{(k)} & = & b1 \\ B^T x_1^{(k)} & + & A_2 x_2^{(k+1)} & = & b2 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcrcl} A_1 x_1^{(k+1)} & + & B x_2^{(k)} & = & b1 \\ B^T x_1^{(k+1)} & + & A_2 x_2^{(k+1)} & = & b2. \end{array}$$

Finden Sie für jedes der beiden Verfahren hinreichende Bedingungen, so dass das jeweilige Iterationsverfahren konvergiert.

Aufgabe 2: (6+6 Punkte)
Es sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das

   i) Jacobi-Verfahren,

   ii) Gauß-Seidel-Verfahren,

   iii) SOR-Verfahren mit $\omega = \frac{1}{2}$

   zur Lösung von $Ax = b$ konvergiert. Etwaig gesuchte Eigenwerte dürfen Sie mit Matlab bestimmen, benötigte Matrizen müssen jedoch handschriftlich berechnet werden.

b) Führen Sie 2 Schritte, ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ mit den jeweiligen Verfahren handschriftlich aus.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei A eine symmetrische, positiv definite Matrix, $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ und $R_\alpha = I - \alpha A$. Zeigen Sie: Für das nicht vorkonditionierte stationäre Richardson Verfahren gilt

$$||e^{(k+1)}||_A \leq \rho(R_\alpha)||e^{(k)}||_A, \quad k \geq 0.$$

Hinweis: Begründen Sie warum $A^{-1/2}$ mit $A^{-1} = A^{-1/2}A^{-1/2}$ existiert.

Programmieraufgabe (15 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, dass zur eingegebenen Matrix A und rechter Seite b die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mittels

i) Gauß-Seidel-Verfahren

ii) Jacobi-Verfahren

berechnet und bei dem das verwendete Verfahren vom Benutzer gewählt werden kann (der Benutzer soll dafür nicht auf den Programmcode zugreifen müssen).
Benutzen Sie dazu die Hilfsroutinen `triu`, `tril` und `diag`, die bereits in matlab und octave implementiert sind. Approximieren Sie damit die Lösungen x der folgenden linearen Gleichungssysteme

i) das System zum elektrischen Netzwerk aus Kapitel 2.1 der Vorlesung mit $f_1 = 1, f_2 = 2$ und $f_3 = 3$

ii) Das am Knoten 2 geerdete System zum elektrischen Netzwerk aus Aufgabe 1 des letzten Übungsblattes.

iii) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

und $b = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Vergleichen Sie die verschiedenen Iterationsverfahren für $m = 10, 100, 100000$.

Iterieren Sie bis $||r^{(k)}||_2 \leq 10^{-5}\|r^{(0)}\|_2$ erreicht ist, wobei $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ ist .

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an
Ihren Übungsleiter / Ihre Übungsleiterin mit Betreff der Form: `Uebung1, Nachname, Vorname` schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen bzw. die Aufgabe wird als unbearbeitet gewertet!**

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ($\rightarrow$ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum

- **der Aufgaben 1-3: 24. Mai 2017 bis 16:00 Uhr;**
- **Abgabedatum der Programmieraufgabe: 29. Mai 2017 bis 12:00 Uhr;**

Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.