MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

24. Mai 2017

6. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (2+5 Punkte)

Gegeben sei ein endlich dimensionaler Vektorraum V, eine Abbildung $A : V \to V$, die wir mit der symmetrisch positiv definiten Matrix A identifzieren können, und ein Unterraum $U \subset V$. Damit haben wir eine Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ bzw. $v = u + u^\perp$ für alle $v \in V$ mit $\langle u, Au^\perp \rangle = 0$, d.h. $u \perp_A u^\perp$ für alle $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$. Wir definieren die A-orthogonale Projektion $P_A : V \to U$ durch

$$P_A(v) := u.$$

Zeigen Sie, dass

i) $\langle P_A v, w \rangle_A = \langle v, w \rangle_A \quad \forall w \in U$ und

ii) $\|P_A v - v\|_A = \min_{w \in U} \|w - v\|_A$

gelten.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Verifizieren Sie für das Gradientenverfahren die Identität

$$\frac{||e^{(k)}||_A^2 - ||e^{(k+1)}||_A^2}{||e^{(k)}||_A^2} = \frac{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)_M^2}{\left(M^{-1}Ay^{(k)}, y^{(k)}\right)_M \left(A^{-1}My^{(k)}, y^{(k)}\right)_M} .$$

Dabei ist

$$e^{(k)} := x - x^{(k)}, \quad y^{(k)} := M^{-1}r^{(k)}, \quad \text{und} \quad r^{(k)} := b - Ax^{(k)}.$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Es seien

$$\beta_k = \frac{\left(p^{(k)}, r^{(k+1)}\right)_A}{\left(p^{(k)}, p^{(k)}\right)_A}, \quad \text{und} \quad p^{(0)} := r^{(0)}$$

gewählt. Beweisen Sie, dass die induktiv definierten konjugierten Suchrichtungen

$$p^{(k+1)} := r^{(k+1)} - \beta^{(k)} p^{(k)}, \quad k = 0, 1, ...$$

in jedem Iterationsschritt des CG-Verfahrens eine A-orthogonale Basis bilden. Es gilt also

$$\left(Ap^{(j)}, p^{(k+1)}\right) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Beweisen Sie, dass Sie die Koeffizienten $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ aus dem CG-Verfahren auch durch

$$\alpha^{(k)} = \frac{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})} \quad \text{und} \quad \beta^{(k)} = (-1)\frac{\left(r^{(k+1)}, r^{(k+1)}\right)}{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)},$$

berechnen können; wir also die Berechnung eines inneren Produkts sparen können.

Abgabedatum: 01. Juni 2017 bis 14:00 Uhr Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.