MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

31. Mai 2017

7. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (6 Punkte):

Wann konvergiert das Gradientenverfahren (ohne Vorkonditionierer) schlecht?
Versuchen Sie Kriterien anzugeben, begründen Sie Ihre Behauptung und geben Sie auch ein konkretes Beispiel $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$, welche die Voraussetzungen aus der Vorlesung erfüllen, an.

Aufgabe 2: (5+3 Punkte)
Gegeben sei $f(x) := \sin(\frac{\pi}{2}x)$ auf dem Intervall $[-2, 2]$.

i) Bestimmen Sie mittels Lagrangescher Interpolationsformel ein Polynom $p \in \mathbf{P}_4$ mit folgenden Eigenschaften:

$$p(-2) = f(-2), \quad p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2).$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung. Skizzieren Sie f und p in einem Koordinatensystem. Ist die gefundene Lösung eindeutig?

ii) Geben Sie eine obere Schranke für den betragsmäßigen Interpolationsfehler in $[a, b]$ an. Berechnen Sie den Fehler und die obere Schranke für $x = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3: (4+4 Punkte)
Es seien folgende Stützstellen gegeben:

i	(x_i, y_i)
0	$(-2, -1)$
1	$(-1, 1)$
2	$(0, 0)$
3	$(1, 1)$
4	$(2, -1)$

Mit $p \in \mathbf{P}_4$ sei das zugehörige Interpolationspolynom bezeichnet. Berechnen Sie p durch

i) die Methode nach Lagrange

ii) die Methode nach Newton

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Programmieraufgabe: (10+10 Punkte)

Schreiben Sie zwei Matlab-Programme, die jeweils

a) das Gradientenverfahren

b) bzw. das Verfahren der konjugierten Gradienten

aus der Vorlesung umsetzen.

i) Es sei nun die rechte Seite $b = (1,1)^T$ gegeben. Analysieren Sie das Gradientenverfahren (mit $M = I$) aus der Vorlesung geometrisch für folgende Matrizen:

$$\text{i.i) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{i.ii) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.iii) } A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie ihre zuvor erstellte Implementierung mit dem Startwert: $x^{(0)} := (10,10)^T$). Legen Sie mit `meshgrid` ein XY-Gitter ($[-15,15]^2$ für i.i) und i.iii), $[-50,50]^2$ für i.ii)) an. Plotten Sie dazu die Niveaulinien und die durch $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ beschriebene Hyperfläche (mit `surfc`). Visualisieren Sie die Folge der berechneten Iterierten $x^{(k)}$ wie folgt:

- Zeichnen Sie $x^{(k)}$ mittels `plot` jeweils in den Niveauplot ein.
- Zeichnen Sie das zugehörige $-\alpha_k \nabla f(x^{(k)})$ mit `quiver` ein.

Hinweis: Mit `view`(0,90) realisieren Sie beispielsweise eine Kameraeinstellung 'von oben'.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse **schriftlich**:

1.) Wie verhält sich die Iteration qualitativ?

2.) Konvergiert das Schema?

3.) Konvergiert sie auch gegen eine Lösung?

ii) Verwenden Sie die in Aufgabe 1 hergeleitete Matrix A und rechte Seite b und nutzen Sie sowohl das Gradientenverfahren als auch das konjugierte Gradientenverfahren zur Bestimmung einer Lösung des Systems $Ax = b$. Überlegen Sie sich einen entsprechenden Startwert, der die Überlegenheit des konjugierten Gradientenverfahrens für das von Ihnen gewählte System belegt. Begründen Sie ihre Wahl. Plotten Sie wie in Aufgabenteil i) auch für das Verfahren der konjugierten Gradienten den Verlauf der Iterierten. Wählen Sie in entsprechendes Gitter. Beachten Sie, dass Sie $-\alpha_k \nabla f(x^{(k)})$ für das Verfahren der konjugierten Gradienten in `quiver` adequat ersetzen müssen.
Hinweis: Um einen passenden Startwert zu finden, kann es nützlich sein, den kostspieligen Plot testweise zu deaktivieren und nur die Residuen oder Iterationszahlen auszugeben.

Wählen Sie zudem A_1 und $b = (1,1)^T$ sowie Startwert $x^{(0)} := (10,10)^T$ aus Aufgabenteil i) und lösen Sie das System mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten. Bewerten Sie das Konvergenzverhalten beider Verfahren. Plotten Sie auch hier den Verlauf der Iterierten im Verfahren der konjugierten Gradienten.

Hinweis: Konzentrieren Sie sich zuerst auf eine fehlerlose Implementierung der Verfahren und erst dann auf die Umsetzung der Visualisierung.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an
Ihren Übungsleiter / Ihre Übungsleiterin mit Betreff der Form: `Uebung1, Nachname, Vorname` schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen bzw. die Aufgabe wird als unbearbeitet gewertet!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen `ueb01_vorname_nachname.zip`
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum: 14. Juni 2017 bis 14:00 Uhr Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.