

## 8. Übung zur Numerischen Mathematik

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

### Aufgabe 1: (8 Punkte)

In der nachfolgenden Tabelle finden Sie die Werte eines Polynoms vierten Grades  $p$ . Einer der Funktionswerte ist falsch. Korrigieren Sie ihn und geben Sie das gesuchte Polynom an.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(x)$	8	23	33	37	31	28	18	8	2	5	23

**Hinweis:** Überlegen Sie, wie sich ein Fehler im Schema der dividierten Differenzen auswirkt.

### Aufgabe 2: (6+2+2+4 Punkte)

Die Funktion  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  soll durch die Polynome  $p \in \mathbf{P}_n$  approximiert werden. Die Stützstellen  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , seien äquidistant gewählt, sodass mit entsprechendem  $h \in \mathbb{R}$  auch  $x_n = b$  gelte.

i) Zeigen Sie

$$|f(x) - p(x)| \leq h^{n+1} \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{4(n+1)} \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1)$$

Es sei nun  $n = 5$ . Welche Fehlerschranken ergeben sich daraus für die Funktionen

ii)  $f(x) = \sin(x)$  ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ,

iii)  $f(x) = e^{-3x}$  ,  $x \in [0, 5]$  ?

Es sei nun  $n = 2$ . Können Sie eine schärfere Fehlerschranke als (1) für

iv)  $f(x) = \sin(x)$  ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

berechnen?

**Aufgabe 3:** (5+5+3 Punkte) Interpolieren Sie die Funktion  $f(x) = |x|$  in den Stützstellen  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  durch

i) einen kubischen Spline  $s_1$  mit den Randbedingungen

$$s_1''(x_0) = s_1''(x_2) = 0$$

ii) einen kubischen Spline  $s_2$  mit den Randbedingungen

$$s_2'(x_0) = f'(x_0) \quad , \quad s_2'(x_2) = f'(x_2)$$

iii) ein Polynom  $p$  vom Grad 4 mit den Randbedingungen

$$p'(x_0) = f'(x_0) \quad , \quad p'(x_2) = f'(x_2)$$

### Programmieraufgabe (15 Punkte)

Erstellen Sie ein Programm zur Newton-Interpolation und rechnen Sie das Beispiel von Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad x \in [-1, 1].$$

Verwenden Sie zur Berechnung des Interpolations-Polynoms  $p_n(x)$

1. äquidistante Stützstellen (z.B. mit *linspace*)
2. die Stützstellen, die durch die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome gegeben sind.  
**Hinweis:** Die Tschebyscheff-Polynome lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Polynome auch darstellen als  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$ . Daher liegen die Nullstellen von  $T_n(x)$  bei  $x = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ .

Schätzen Sie den Fehler  $\|f - p_n\|_\infty$ , indem Sie das Intervall hinreichend fein unterteilen und die Differenzen zwischen  $f(x)$  und  $p_n(x)$  betrachten.

Führen Sie Ihre Berechnung für  $n = 1, 4, 10, 15, 25, 40$  durch. Geben Sie die berechneten Fehler in einer Tabelle an. Stellen Sie sowohl die Fehler als auch die berechneten Polynome graphisch dar.

### Abgabe des Programmiererteils

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an Ihren Übungsleiter / Ihre Übungsleiterin mit Betreff der Form: **Uebung1, Nachname, Vorname. Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen bzw. die Aufgabe wird als unbearbeitet gewertet!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen `ueb01_vorname_nachname.zip`
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ( $\rightarrow$  Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

**Abgabedatum: 22. Juni 2017 bis 14:00 Uhr Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**