MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

22. Juni 2017

# 9. Übung zur Numerischen Mathematik

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

**Aufgabe 1:** (3+3+3 Punkte)
Betrachten Sie die Splines $s_1$ und $s_2$ sowie das Polynom $p$ vom Grad 4 aus Aufgabe 3 der letzten Übung. Berechnen Sie jeweils den Interpolationsfehler zu $f$ im Intervall $[-1, 1]$ in der Maximumsnorm (($||f - s_i||_\infty, i = 1, 2$ und $||f - p||_\infty$).

**Aufgabe 2:** (3+3+3+4 Punkte)
Betrachten Sie das Integral

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

i) Berechnen Sie (1) mithilfe der zusammengesetzten Trapezregel für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ Teilintervalle.

ii) Berechnen Sie (1) exakt.

iii) Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler für die zusammengesetzten Trapezregeln aus Aufgabenteil i).

iv) Sei **tol** eine vorgegebene Toleranz für den maximalen Fehler der numerischen Integration. Wie können Sie mithilfe der zusammengesetzten Trapezregel garantieren, dass die Toleranz nicht überschritten wird, d.h. dass

$$\left| \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x - I_h(\sin^2) \right| < \mathbf{tol}$$

gilt? (Führen Sie eine entsprechende Rechnung aus!)

**Aufgabe 3:** (4+4 Punkte)
Zur numerischen Berechnung von

$$I(f) := \int_{[-1,1]} f(x)\ dx$$

für eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ wird die folgende Quadraturformel vorgeschlagen:

$$I_n(f) := \frac{1}{9}\left(f(-1) + 8f(-\frac{1}{2}) + 8f(\frac{1}{2}) + f(1)\right)$$

i) Beweisen Sie, dass mit dieser Formel alle Polynome bis zu einem Höchstgrad von 3 exakt integriert werden, d.h., es gilt $I_n(p) = I(p)$ für $p \in \mathcal{P}_3$.

ii) Folgern Sie für $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$ die Fehlerabschätzung

$$|I_n(f) - I(f)| \leq \frac{1}{24} \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(4)}(\xi)| \cdot \int_{-1}^{1} |(x^2-1)(x^2-\frac{1}{4})| \; dx \leq \frac{1}{96} \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(4)}(\xi)| \; ,$$

indem Sie $f$ durch sein Interpolationspolynom der Ordnung 3 mit Stützstellen $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ ersetzen und das Integral über den Interpolationsfehler abschätzen.

**Abgabedatum: 29. Juni 2017 bis 14:00 Uhr Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**