MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2017

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

06. Juli 2017

11. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (4+1+3 Punkte)
Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mit $\mathrm{tr}(X) := \sum_{i=1}^n X_{ii}$ bezeichnen wir die Spur einer Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. Beweisen Sie: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Zeigen Sie, dass die Spur unter zyklischen Vertauschungen invariant ist, d.h.
$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \ .$$
3. Seien $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie:
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ .$$

Aufgabe 2: (5+3 Punkte)
Die Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Form
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
Der Block $A \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ sei invertierbar, $B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$, $C \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1}$, und $D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$. Zeigen Sie:

1. $\det(M) = \det(A) \cdot \det(S)$, wobei $S = D - CA^{-1}B$ ist.
Tipp: LR-Zerlegung auf Blockebene.
2. Die Menge der Eigenwerte $\sigma(M) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ von M wird auch als das Spektrum von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass für $C = 0$:
$$\sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(D) \ .$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei A eine reelle symmetrische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Rayleigh-Quotient λ_R ist definiert als
$$\lambda_R := \frac{x^T A x}{x^T x}.$$
Zeigen Sie, dass gilt
$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} ||Ax - \lambda x||_2^2 = ||Ax - \lambda_R x||_2^2$$

Abgabedatum: 13. Juli 2017 bis 14:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.