MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

Sommersemester 2017

13. Juli 2017

12. Übung zur Numerischen Mathematik

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich **Ihre Matrikelnummer** und **Ihre Übungsgruppe**.

Aufgabe 1: (3+5 Punkte)
Gegeben sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

i) Ist A_1 unitär diagonalisierbar?

ii) Die orthogonale Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

sei Ihnen bekannt. Geben Sie die Schursche Normalform $A_1 = Q^*TQ$ an.

Aufgabe 2: (4+4+4 Punkte)
Gegeben seien

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ und } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_2.

ii) Führen Sie zwei Schritte mit der Potenzmethode durch und geben Sie die Approximationen $x^{(2)}$ und $\lambda^{(2)}$ an.

iii) Berechnen Sie den Fehler $\|q^{(k)} - x_1\|_2$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: (4+3+6 Punkte)
Sei

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

i) Zeigen und begründen Sie, dass $\mu = \frac{1}{2}$ ein passender Shift-Parameter ist, um mithilfe der Inversen Iteration den kleinsten Eigenwert der Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu approximieren.

ii) Führen Sie eine Iteration der Inversen Iteration mit Shift-Parameter $\mu = \frac{1}{2}$ und Startvektor $x^{(0)} = (0,1,0)^T$ durch.

iii) Gegeben sei nun folgende Iterationsvorschrift: Für $k = 1, 2, \ldots$ berechne:

$$\begin{aligned} (B - \mu I)^{1/2} y^{(k)} &:= x^{(k)}, \\ \tilde{\sigma}^{(k)} &:= \frac{(y^{(k)})^* B y^{(k)}}{(y^{(k)})^* y^{(k)}}. \end{aligned}$$

Nehmen Sie als bekannt an, dass der Parameter $\tilde{\sigma}^{(k)}$ gegen den Eigenwert von B, der am nächsten an μ liegt, konvergiert.
Sei nun $\mu = 0$. Geben Sie die Matrix $B^{1/2}$ an, die im Algorithmus für $\mu = 0$ benötigt würde.
Hinweis: $B^{1/2}$ soll so bestimmt werden, dass $B = B^{1/2}B^{1/2}$ gilt. Überlegen Sie sich, wie B zerlegt werden kann.

Abgabedatum: 20. Juli 2017 bis 14:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.