MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

25. Oktober 2017

3. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: $(6 + 2 + 2 = 10$ Punkte) Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{y(t) \cdot 3t^2}{\exp(t^3)} + \frac{2t}{\exp(t^2)}, \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe des Gronwall-Lemmas, dass $0 \leq y(t) \leq \exp(1)$, $t \geq 0$, und $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t) = 0$ gilt.

Lösen Sie zudem das AWP mit dem explizitem Euler-Verfahren (in Matlab) mit geeigneter Schrittweite Δt und plotten oder skizzieren Sie die Lösung im Intervall [0,10]. Zeichnen Sie zudem die Abschätzung des Gronwall-Lemmas ein.

Hinweis: Sie brauchen keinen Quellcode auszudrucken.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des modifizierten Euler-Verfahrens nach Collatz:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right).$$

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Durch die folgende Butcher-Tabelle ist ein Runge-Kutta-Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

Leiten Sie das Verfahren her.

Hinweis: Verwenden Sie zunächst die Simpsonregel und anschließend die Taylorentwicklung für $y(t+h/2)$ um t. Auf eine Integraldarstellung von $y(t+h)$ lässt sich die Mittelpunktregel anwenden. Dem resultierenden Term wird nun noch ein weiterer Term hinzugefügt: Entwickeln Sie dazu $y'(t+h/2)$ um t, formen Sie die Gleichung sinnvoll um, und fügen Sie das Ergebnis zur Entwicklung von $y(t+h)$ hinzu.

Programmieraufgabe 1: $(3 + 3 = 6$ Punkte)
Vergleichen Sie das explizite Euler-Verfahren mit dem Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 3 anhand des Anfangswertproblems der Programmieraufgabe des 1. Übungsblattes. Beschränken Sie sich auf das Intervall [0,5] und wählen Sie eine sinnvolle Zeitschrittweite. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler

$$e_{\max} := \max_{i=0,\ldots,n} |y(t_i) - u_h(t_i)|$$

zwischen der exakten Lösung y und der approximierten Lösung u_h und geben Sie den approximativen Wert für die Konvergenzordnung

$$\frac{\log(e_{\max})}{\log(\Delta t)}$$

an. Plotten Sie zudem die exakte Lösung sowie die approximierten Lösungen.

Allgemeine Hinweise zum Programmierteil

- Der Code muss sinnvoll kommentiert sein.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

Abgabe des Programmierteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihres Übungsgruppenleiters / Ihrer Übungsgruppenleiterin, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ($\rightarrow$ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.
- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe: Bis Donnerstag, 2. November 2017 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.