MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

8. November 2017

5. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Definition:
Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Man sagt, dass f eine *einseitige Lipschitz-Bedingung* erfüllt, wenn es eine Konstante $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\langle f(t,y) - f(t,z),\, y - z \rangle \;\leq\; l\, ||y - z||_2^2$$

für alle $(t, y), (t, z)$ aus dem Definitionsbereich G gilt. Man beachte, dass l auch negativ sein kann.

Aufgabe 1: (10 Punkte) Sei eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t, y)$$

gegeben. Dabei sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Funktion, die eine einseitige Lipschitz-Bedingung mit Konstante $l \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zudem sei für die Schrittweite $h > 0$ die Bedingung $hl < 1$ erfüllt (Für $l \leq 0$ ist das immer wahr).
Beweisen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren unter diesen Voraussetzungen konvergiert und die Konvergenzordnung 1 hat.

Hinweis: Sätze aus der Vorlesung anschauen.

Aufgabe 2: (4+6+2 = 12 Punkte) Die Bewegung eines gedämpften mechanischen Systems werde durch die Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) + b \cdot x'(t) + D \cdot x(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

mit Konstanten $m = 1$, $b > 0$, $D = 50$ beschrieben.

1. Notieren Sie die oben angegebene Differentialgleichung 2. Ordnung als System erster Ordnung der Form $y' = Ay$.
    - Wann werden derartige Systeme als steif bezeichnet?

- Ist das System für $b = 0.2, 2, 200\,000$ steif?

2. Geben Sie den Bereich absoluter Stabilität des expliziten Euler-Verfahrens an.
   - Welche Schrittweiteneinschränkung ergibt sich daraus für $b = 200\,000$?
   - Welche Schrittweiteneinschränkung ergibt sich daraus für $b = 2$? *(Sie können Ihr `MATLAB` -Programm verwenden, um die Einschränkung an die Schrittweite zu überprüfen.)*
3. Geben Sie die Schrittweiteneinschränkung für das implizite Euler-Verfahren und $b = 200\,000$ an.

Aufgabe 3: $(4 + 4 = 8$ Punkte)
Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ und ein 2-stufiges implizites Runge-Kutta-Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}, \quad \beta_{2,2} \geq 0.$$

(i) Bestimmen Sie eine Funktion g, sodass das Runge-Kutta-Verfahren als

$$y_{n+1} = y_n \cdot g(\gamma_1, \gamma_2, \beta_{2,1}, \beta_{2,2}, z), \quad z = \lambda h$$

geschrieben werden kann.

(ii) Bestimmen Sie für das Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

des letzten Übungsblattes ($\rightsquigarrow$ Programmieraufgabe) den Bereich absoluter Stabilität. Gibt es eine Einschränkung für die Schrittweite h für die betrachtete Differentialgleichung? Wenn ja, geben Sie den zulässigen Bereich für h an.

Abgabe: bis Mittwoch, 15. November 2017 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.