MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

15. November 2017

6. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: $(6 + 8 + 2 = 16$ Punkte)
Es sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ und ein m-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren gegeben.

1. Zeigen Sie, dass es für $z = \lambda h$ ein Polynom $g(z) \in \mathcal{P}_m$ gibt, sodass für die Vorschrift des Runge-Kutta-Verfahrens

   $$y_{n+1} = y_n + h(\gamma_1 k_1 + \cdots + \gamma_m k_m) = g(\lambda h) y_n$$

   gilt.
2. Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils, dass das Verfahren maximal Konsistenzordnung m haben kann und dass die Konsistenzordnung genau dann maximal ist, wenn

   $$g(\lambda h) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda h)^i}{i!}$$

   erfüllt ist.
3. Gibt es ein m-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren, welches (für $\lambda < 0$) keine Schrittweiteneinschränkung hat?

Aufgabe 2: $(3 + 3 + 3 = 9$ Punkte)
Es sei die Matrix zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (Linienmethode)

$$A = (m+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. A hat die Eigenwerte
$$\lambda_j = 2\,(m+1)^2 \left(\cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right) - 1\right), \quad j = 1, \dots, m,$$
zu den Eigenvektoren x_j mit den Komponenten
$$(x_j)_\nu = \sin\left(\frac{j\pi\nu}{m+1}\right), \quad \nu = 1, ..., m.$$
Tipp: Es gilt (begründen!) $\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2\sin(x)\cos(y)$.

2. Das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ wird steifer, je größer m ist (also mit wachsender Gitterauflösung).

3. Für das explizite Euler-Verfahren, angewandt auf $y' = Ay$, erfüllt
$$\Delta t \leq \frac{1}{2(m+1)^2}$$
die Zeitschrittweitenrestriktion.

Bonusaufgabe $(4+4+1=9$ Punkte)
Betrachten Sie das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

und das Anfangswertproblem
$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$
für $\lambda \in \mathcal{R}_{<0}$.

(i) Sei $z = \lambda h$. Bestimmen Sie eine Funktion $p \in \mathcal{P}_4$, sodass
$$y_{n+1} = p(z) \cdot y_n.$$

(ii) Plotten Sie den Bereich absoluter Stabilität mit `MATLAB`. Modifizieren Sie dazu den folgenden Code: (Sie müssen diesen nicht ausdrucken.)

```
[x,y] = meshgrid(-4:0.1:1,-4:0.1:4);
z = complex(x,y);
contourf(x,y,-abs(p(z)),[-1,-1])
grid on
title('Stabilitaetsgebiet RK4')
xlabel('Re(IR)')
ylabel('Im(IR)')
axis equal tight
```

Erstellen Sie einen `semilogy`-Plot in `MATLAB`, in dem Sie für $\lambda \in [-1000, -1]$ die zulässigen Schrittweiten $h > 0$ einzeichnen. Sie können den Befehl `fzero` zur Approximation einer Nullstelle verwenden.

(iii) Geben Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens für die gegebene Differentialgleichung an.

Abgabe: bis Mittwoch, 22. November 2017 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.