MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

29. November 2017

8. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: $(10 + 3 = 13$ Punkte)
In der Fluiddynamik beschreibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\rho v) = 0$$

die Massenerhaltung. Hierbei ist ρ die Fluiddichte, t die Zeit und v ein Flussfeld.

- Seien $\varphi(x)$ und $v(x,t)$ genügend glatte Funktionen. Definieren Sie alle Charakteristiken des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}(x,t) &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(x,0) &= \varphi(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

  und berechnen Sie die exakte Lösung $\rho(x(t),t)$ entlang einer beliebigen (aber fest gewählten) Charakteristik $(x(t),t)$.

  Hinweis: Stellen Sie die Differentialgleichung so um, dass sie die Gestalt der inhomogenen Advektionsgleichung mit rechter Seite $b(\rho,x,t)$ annimmt.

- Sei nun $v(x,t) = \frac{x}{1+t}$. Geben Sie die exakte Lösung $\rho(x,t)$ des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von φ, x, t an und überprüfen Sie Ihre Lösung.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Beantworten Sie mit Beweis, ob das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

sachgemäß gestellt ist.

Aufgabe 3: $(1 + 3 + 3 + 4$ Punkte)
Wir betrachten das folgende Modellproblem zur Advektionsgleichung: $(c > 0)$

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \qquad && x \in [a,b], t \in [0,T], \\ u(x,0) &= f(x), && x \in [a,b], \\ u(a,t) &= \phi_a(t), && t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Zur Lösung verwenden wir das folgende implizite Differenzenverfahren (Zeit-Rückwärts / Raum-Zentriert):

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k} + c\frac{u^h_{i+1,j+1} - u^h_{i-1,j+1}}{2h} = 0.$$

Zur Anwendbarkeit müssen wir Randwerte

$$u(b,t) = \phi_b(t), \quad t \in [0,T],$$

vorgeben. Damit das Problem sachgemäß gestellt ist, sei vorausgesetzt, dass ϕ_b kompatibel zu f und ϕ_a ist.

i) Geben Sie die „Moleküldarstellung“ an.

ii) Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.

iii) Geben Sie die CFL-Bedingung an. Ist diese erfüllt?

iv) Leiten Sie das Verfahren her.

Abgabe: Bis Mittwoch, 06. Dezember 2017 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.