

10. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie das Lax-Wendroff-Verfahren

$$u_{i,j+1}^h = \frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda) u_{i-1,j}^h + (1 - c^2\lambda^2) u_{i,j}^h - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda) u_{i+1,j}^h,$$

mit $\lambda = \Delta t / \Delta x$ für $c \in \mathbb{R}$ und das AWP

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, & (x, t) &\in [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) &= f(x), & x &\in [a, b], \\ u(a, t) &= \phi_a(t), & t &\in [0, T], \\ u(b, t) &= \phi_b(t), & t &\in [0, T]. \end{aligned}$$

Unter welchen Annahmen an die Schrittweiten und c berechnet das Verfahren die exakte Lösung in den Gitterpunkten? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $G := (a, b) \times (0, T)$ betrachten wir das folgende Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in G, \\ u_i(x, 0) &= \phi_i(x), & x &\in [a, b], \\ u_i(a, t) &= \psi_{i,1}(t), & t &\in [0, T], \\ u_i(b, t) &= \psi_{i,2}(t), & t &\in [0, T]. \end{aligned}$$

Es seien die Lösungen $u_i(x, t) \in \mathcal{C}(\overline{G})$, $i \in \{1, 2\}$, der Wärmeleitungsgleichung zu den zugehörigen Anfangs- und Randwertfunktionen gegeben. Wir nehmen zudem an, dass die Lösungen $u_i \in \mathcal{C}^2(G \cup (a, b) \times \{T\})$ erfüllen.

Zeigen Sie, dass $u_1 \geq u_2$ auf \overline{G} erfüllt ist, sofern $\phi_2 \leq \phi_1$ auf $[a, b]$ und $\psi_{2,j} \leq \psi_{1,j}$, $j \in \{1, 2\}$, auf $[0, T]$ gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende Anfangsrandwertproblem aus der Vorlesung zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \phi(x), & x &\in [0, \pi], \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t &> 0.\end{aligned}$$

Wir können die Lösung $u(x, t)$ als Reihe spezieller Lösungen

$$u_n(x, t) = C_n \sin(nx) \exp(-n^2 t)$$

darstellen. Wir definieren die Approximation \tilde{u} an u als m -te Partialsumme dieser Reihe:

$$\tilde{u}(x, t) := \sum_{n=1}^m u_n(x, t).$$

Zeigen Sie, dass mit

$$K := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\phi(x)| dx, \quad q := e^{-t},$$

der Fehler die Ungleichung

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq K \cdot \frac{q^{m+1}}{1 - q}, \quad t > 0,$$

erfüllt.

Hinweis: Schätzen Sie zunächst die Koeffizienten $|C_n|$ ab und anschließend $|u_n|$ unter Ausnutzung von $\exp(-n^2 t) \leq \exp(-nt)$ sowie der geometrischen Reihe.

Aufgabe 4: (10 + 4 = 14 Punkte)

Sei $u : [0, \pi] \times [0, \infty)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty),$$

die den Bedingungen

$$\begin{aligned}u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, & t &\in [0, \infty), & \text{(Randwerte)} \\ u(x, 0) &= g(x), & x &\in [0, \pi], & \text{(Anfangswerte für } u) \\ u_t(x, 0) &= h(x), & x &\in [0, \pi], & \text{(Anfangswerte für } u_t)\end{aligned}$$

genügt. Dann beschreibt u die Schwingung einer in den Intervallenden 0 und π eingespannten Saite, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Anfangslage g mit der Anfangsgeschwindigkeit h losgelassen wird. Die Funktionen g, h seien zweimal stetig differenzierbar.

1. Benutzen Sie den Separationsansatz

$$u(x, t) = v(x) \cdot w(t),$$

um die speziellen Lösungen

$$u_n(x, t) = \sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

herzuleiten, die den Randwertbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ genügen.

2. Erklären Sie, wie man aus 1. die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

herleitet und geben Sie an, welche Bedingungen die Koeffizienten A_n und B_n erfüllen müssen, damit u das Anfangsrandwertproblem löst.

Hinweis: Gehen Sie in 1. analog zur Wärmeleitungsgleichung vor:

- 1.) Leiten Sie gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für v und w her.
- 2.) Die Gleichung für v ist von der Form $v'' + \lambda v = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Folgern Sie $\lambda > 0$, indem Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} (\lambda v) \cdot v \, dx$$

geeignet umformen und die Randbedingungen ausnutzen.

- 3.) Lösen Sie die Differentialgleichung für v (oder schlagen Sie die Lösung nach). Nutzen Sie die Randbedingungen aus um zu zeigen, dass sogar $\lambda = \lambda_n =: n^2, n \in \mathbb{N}$ gelten muss.
- 4.) Gehen Sie für w analog vor.
- Verwenden Sie bei 2. die zwei Anfangswertbedingungen. Sie dürfen anschließend, wie in der Vorlesung, die Kenntnisse über die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe als gegeben voraussetzen.

Abgabe: Bis Mittwoch, 20. Dezember 2017, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.