MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.

10. Januar 2017

12. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Wir betrachten zum Modellproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t \geq 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), && x \in [0,1]. \end{aligned}$$

das Theta-Verfahren

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k} = \theta \frac{u^h_{i-1,j+1} - 2u^h_{i,j+1} + u^h_{i+1,j+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u^h_{i-1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i+1,j}}{h^2},$$

mit $0 \leq \theta \leq 1$. Führen Sie eine von-Neumann-Stabilitätsanalyse durch und leiten Sie, wenn möglich, Bedingungen an h und k her, sodass das Verfahren stabil ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie in der Stabilitätsanalyse zwischen $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} > \theta \geq 0$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Leiten Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), && x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, && \textit{(homogene) Dirichlet-Randbedingung}, \\ u'(1) &= 0, && \textit{(homogene) Neumann-Randbedingung}, \end{aligned}$$

die Variationsformulierung her. Wählen Sie den Raum der Testfunktionen V wie in der Vorlesung.

- Welche Voraussetzungen an $u(x)$, $c(x)$ und $f(x)$ müssen Sie treffen?
- Ist die Variationsformulierung eindeutig lösbar?

Hinweise:

- Leiten Sie zunächst die Variationsformulierung mit Testfunktionen aus $\tilde{V} = \{w \in \mathcal{C}^\infty((0,1)) : w(0) = 0\}$ her, sodass Sie das Problem als $a(u,v) = F(v)$, $\forall v \in \tilde{V}$, schreiben können, wobei a eine Bilinearform und F ein lineares Funktional ist.

- Per Dichteschluss (für jedes $v \in V$ gibt es eine Folge von Funktionen $\tilde{v}_n \in \tilde{V}$, die bzgl. $||\cdot||_V$ gegen v konvergieren) lässt sich dies auf den Raum $V = \{w \in H^1((0,1)) : w(0) = 0\}$ übertragen.

- Zeigen Sie anschließend, dass a und F die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllen. Die Abschätzungen lassen sich mit einfachen Mitteln und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen.

Programmieraufgabe: (15 Punkte)

Folgen Sie den Hinweisen aus der Vorlesung zur Codestruktur und grafischen Ausgabe. Dies wird für eine erfolgreiche Bearbeitung vorausgesetzt.

Vermeiden Sie insbesondere Copy-Paste-Codeteile. Schreiben Sie dazu die Anwendung des Differenzenverfahrens in eine eigene Funktion.

Schreiben Sie ein Programm in Matlab, um numerisch die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

für $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]$, $T = 5$, mit den Anfangswerten

$$u(x,0) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \left|x - \frac{\pi}{2}\right| > \frac{\pi}{4}, \\ 1 + \sin\left(4x - \frac{3}{2}\pi\right) & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

und den Randwerten $u(0,t) = u(\pi,t) = \sin(t) \cdot \exp(-t)$, $t \in [0,T]$, mit dem klassischen expliziten Differenzenverfahren (Zeit-Vorwärts / Raum-Zentriert)

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k} = \frac{u^h_{i-1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i+1,j}}{h^2}$$

sowie dem impliziten Verfahren (vgl. Übung 11, Aufg. 2)

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k} = \frac{u^h_{i-1,j+1} - 2u^h_{i,j+1} + u^h_{i+1,j+1}}{h^2}$$

zu lösen. Testen Sie ihre Implementierung mit $\Delta x = \frac{\pi}{100}$ sowie $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \lambda \in \{0.5, 100.0\}$. Plotten Sie die numerischen Lösungen (Sie brauchen nur einen Plot zu $\lambda = 0.5$ auszudrucken) und geben Sie jeweils die benötigte Anzahl an Zeitschritten sowie das Maximum der numerischen Lösung im letzten Zeitschritt, $\max_i u^h(x_i, T)$, an. **Erklären** Sie das Ergebnis.

Beachten Sie auch die Hinweise zur Programmieraufgabe der letzten Übung.

Allgemeine Hinweise zum Programmierteil

- Der Code muss sinnvoll kommentiert sein.

- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).

- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).

- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

Abgabe des Programmierteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihres Übungsgruppenleiters / Ihrer Übungsgruppenleiterin, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe: Bis Mittwoch, 17. Januar 2018 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.