

Prof. Dr. A. Klawonn
 J. Knepper, M. Sc.

17. Januar 2017

13. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Sei für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ das Gebiet $\Omega = (a, b)$ definiert sowie $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \partial\Omega$ und $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von u ist, sodass

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} := \sqrt{\sum_{x \in \Gamma} (u(x))^2} \leq C \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Hinweise:

- Führen Sie der Einfachheit halber zunächst den Beweis für $\Omega = (0, 1)$ durch. Verwenden Sie $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt$ und $|u(0)| = \int_0^1 |u(0)| dx$, um zu zeigen, dass $|u(0)| \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}$.
- Zur Notation:
 1. $\|u\|_{L^2(\Gamma)}$ ist als Randintegral zu verstehen. In einer Dimension entspricht dies einer Punktauswertung, d.h. es gilt z.B. $\|u\|_{L^2(\{a\})} = \sqrt{u(a)^2} = |u(a)|$.
 2. $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|u\|_1^2 := |u|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u')^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx$

Definition: (Schwache Ableitung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u \in L^2(\Omega)$, d.h. quadratisch integrierbar. Dann heißt $D_w u$ schwache Ableitung (*weak derivative*) von u , falls

- $D_w u \in L^2(\Omega)$
- $\int_{\Omega} \varphi'(x) \cdot u(x) dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \cdot D_w u(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : v(\partial\Omega) = 0\}.$

Es gilt nach Meyers und Serrin (1964)

$$H^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = \{u \in L^2(\Omega) : D_w u \text{ existiert} \}.$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei $u \in C^1([a, b])$ und $u' \in L^2([a, b])$. Zeigen Sie, dass dann die klassische und schwache Ableitung fast überall¹ übereinstimmen, d.h. es gilt

$$u'(x) = D_w u(x), \quad \text{fast überall.}$$

Hinweise:

- Sie dürfen verwenden, dass zwei schwache Ableitungen von u (fast überall) gleich sind.
- Der Zusatz „fast überall“ wird der Vollständigkeit halber genannt. Er ist nicht zur Bearbeitung der Aufgabe notwendig und wird in der Übung nochmals motiviert.

Aufgabe 3: (4 + 4 = 8 Punkte)

Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) := |x|$ sowie $v(x) := \text{sign}(x)$. Sind u bzw. v schwach differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie, wenn möglich, die schwache Ableitung an.

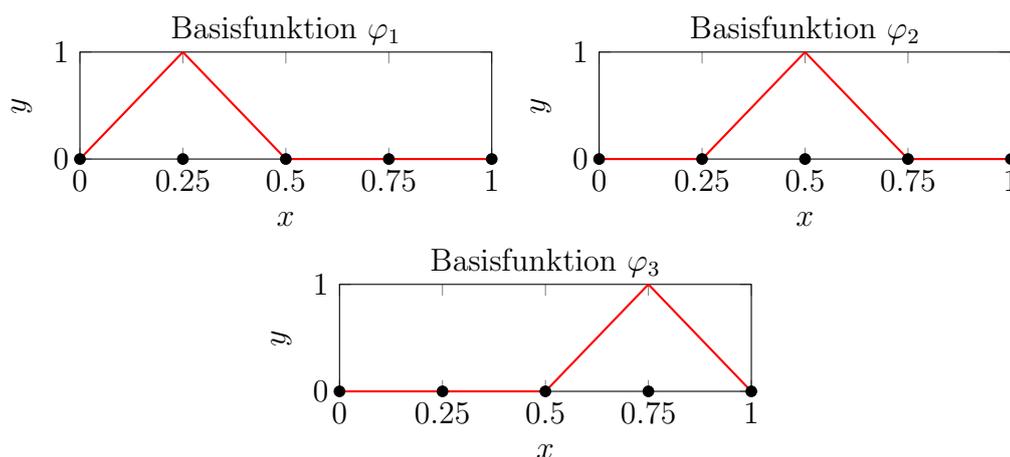
Aufgabe 4: (4 + 6 + 2 = 12 Punkte)

Im Folgenden möchten wir eine approximative Lösung zum Modellproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens berechnen.

- Leiten Sie die Variationsformulierung her und zeigen Sie die eindeutige Lösbarkeit. Wählen Sie als Test- und Lösungsraum den Hilbertraum $H_0^1((0, 1)) := \{v \in H^1((0, 1)) : v(0) = v(1) = 0\}$ mit der zugehörigen H^1 -Norm. Sie dürfen sich auf Beweise von Ungleichungen o.Ä., die in der Vorlesung oder Übung durchgeführt wurden, beziehen.
- Unterteilen Sie das Intervall $[0, 1]$ in 4 Teilintervalle und weisen Sie jedem inneren² Knoten eine Hutfunktion zu:



Formulieren Sie das diskretisierte Variationsproblem mit $V^h \subset H_0^1((0, 1))$ und lösen Sie es mit dem Galerkin-Verfahren (das entstehende Gleichungssystem dürfen Sie mit Matlab lösen).

¹Für zwei integrierbare Funktionen u, v gilt $u = v$ fast überall, falls $\int |u - v| dx = 0$.

²Da Test- und Lösungsraum Nullrandbedingungen enthalten, benötigen wir keine Funktionen für die Randknoten.

- Berechnen Sie analytisch die exakte Lösung des Modellproblems und plotten Sie in Matlab die exakte sowie die approximative Lösung für $x \in [0, 1]$ in dasselbe Koordinatensystem.

Abgabe: Bis Mittwoch, 24. Januar 2018 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.